1-AIN-616 Symbolické programovanie a LISP

Letný semester 2015/16

6. prednáška

Ján Komara

Obsah 6. prednášky

Zopakovanie

Čiastočne rekurzívne funkcie

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia výpočtového modelu

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Turingova úplnosť a totálne funkcionálne programovanie

Zopakovanie

Teória rekurzívnych funkcií

- Primitívne rekurzívne funkcie
  - Aritmetizácia dátových štruktúr.
  - Regulárne rekurzívne definície s mierou.
- Obecne rekurzívne funkcie
  - Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií:
    - Ackermannova funkcia,
    - univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.
  - Churchova téza.
- Čiastočne rekurzívne funkcie
  - Kleeneho prvá veta o rekurzii (veta o pevnom bode).
  - Kleeneho veta o normálnej forme.
  - Turing-Churchova téza.

Teória rekurzívnych funkcií umožňuje vybudovať matematické základy deklaratívnych programovacích jazykov.

Zopakovanie

Primitívne rekurzívne funkcie

- Základné funkcie: $\mathrm{Z}(x) = 0$, $\mathrm{S}(x) = x + 1$, $\mathrm{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$.
- Kompozícia funkcií: $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$.
- Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(\mathrm{S}(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Veta

Trieda primitívne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$*, funkciu predchodcu* $x \dot{-} 1$ *a je uzavretá na explicitné definície a regulárnu rekurziu s mierou.*

Zopakovanie

Obecne rekurzívne funkcie

Trieda obecne rekurzívnych funkcií je najmenšia trieda funkcií, ktorá obsahuje funkciu nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$, funkciu predchodcu $x \dot{-} 1$ a je uzavretá na explicitné definície a regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií.

Obecne rekurzívne funkcie, ktoré nie sú primitívne rekurzívne

- Ackermannova funkcia (1928).
- Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Čiastočné funkcie

n-árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z N^n do N:

$$(\vec{x}, y) \in f \land (\vec{x}, z) \in f \to y = z.$$

Čiastočné funkcie sú usporiadané množinovou reláciou $f \subseteq g$.

Silná rovnosť (Kleene)

$\tau \simeq \rho$ platí, ak jedna z nasledujúcich podmienok je splnená:

- Výrazy τ, ρ sú definované a ich hodnoty sú rovnaké.
- Výrazy τ, ρ nie sú definované.

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.
Označenie:

- $\tau\downarrow$, ak výraz τ je definovaný (má hodnotu, konverguje).
- $\tau\uparrow$, ak výraz τ nie je definovaný (nemá hodnotu, diverguje).

Čiastočne rekurzívne funkcie

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna rovnica v neznámej f:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n-árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca $f_0, f_1, f_2, \ldots$ definovaného predpisom

$$\begin{aligned} f_0 &= \emptyset^{(n)} \\ f_{i+1}(x_1, \ldots, x_n) &\simeq \tau[f_i; x_1, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Poznámka

Toto je prvá časť prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumieme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n-árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \tau[f; x_1, \ldots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - funkcia predchodcu $\mathrm{P}(x) = x \dot{-} 1$.
- Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[x_1, \ldots, x_n].$$

- Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia.
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne odvodenia

Sčítanie

$$x + y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y.$$

Odčítanie

$$x \dot{-} y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then if } y \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{P}(x) \dot{-} \mathsf{P}(y) \textbf{ else } x \textbf{ else } 0.$$

Násobenie

$$x{\cdot}y \simeq \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{P}(x){\cdot}y + y \textbf{ else } 0.$$

Umocňovanie

$$x^y \simeq \textbf{if } y \neq 0 \textbf{ then } x{\cdot}x^{\mathsf{P}(y)} \textbf{ else } 1.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly (príklad)

Primitívne rekurzívna definícia

$$
\begin{aligned}
0 + y &= y \\
\mathrm{S}(x) + y &= \mathrm{S}(x + y).
\end{aligned}
$$

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq \mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\big(\mathrm{P}(x_1) + x_2\big), x_2\Big).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.\mathrm{D}\Big(x_1, \mathrm{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathrm{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Induktívna definícia triedy rekurzívnych termov a triedy rekurzívnych funkčných symbolov:

- Premenné $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy.
- Ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia diskriminačnej funkcie $\mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term.
- Ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie funkcie nasledovníka $\mathrm{S}(\tau)$ a funkcie predchodcu $\mathrm{P}(\tau)$ sú rekurzívne termy.
- Ak $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sú rekurzívne termy, potom aplikácia n-árnej funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ je rekurzívny term.
- Ak $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných $x_1, \ldots, x_n$ a funkčnej premennej $\mathfrak{f}_n$, potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ je rekurzívny term.

S, P a $\lambda_n.\tau$ sa nazývajú rekurzívne funkčné symboly.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Interpretácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Interpretáciu (denotáciu) definovaných rekurzívnych funkčných symbolov $\lambda_n.\tau$ definujeme indukciou na štruktúru rekurzívnych termov τ:

> *Nech* $\tau[\mathfrak{f}_n; x_1, \ldots, x_n]$ *je rekurzívny term v premenných* $x_1, \ldots, x_n$ *a funkčnej premennej* $\mathfrak{f}_n$*. Predpokladajme ďalej, že rekurzívne funkčné symboly vyskytujúce sa vo výraze* τ *sú interpretované podľa induktívneho predpokladu. Potom rekurzívny funkčný symbol* $\lambda_n.\tau$ *interpretujeme ako čiastočnú funkciu* f *definovanú vzťahom*
>
> $$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \ldots, x_n].$$

Interpretáciu rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ označujeme tým istým menom $\lambda_n.\tau$.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.

Dôkaz.

- Indukciou na dĺžku rekurzívneho odvodenia dokážeme, že každá čiastočne rekurzívna funkcia je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.
- Indukciou na štruktúru rekurzívneho termu τ dokážeme, že interpretácia rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ je čiastočne rekurzívna funkcia.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad \mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}\,\mathsf{S}(0) \quad \ldots .$$

Označenie:

- Ak x je prirodzené číslo, potom $\underline{x}$ je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x:

$$\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0).$$

- Ak $x_1, \ldots, x_n$ sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \ldots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_1\text{-krát}}(0), \ldots, \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$\mathrm{D}(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \qquad \mathrm{P}(\underline{x}) \qquad (\lambda_n.\sigma)(\underline{\vec{x}}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_3 \\
\mathrm{D}(\underline{x+1}, \sigma_2, \sigma_3) &\rhd_1 \sigma_2 \\
\mathrm{P}(\underline{x}) &\rhd_1 \underline{x \dot{-} 1} \\
(\lambda_n.\sigma[\mathfrak{f}_n; \vec{x}])(\underline{\vec{x}}) &\rhd_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \underline{\vec{x}}].
\end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \rhd_1 \rho.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- $\tau_1 \rhd_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$ také, že

$$\tau_1 \equiv \rho_0 \rhd_1 \rho_1 \rhd_1 \cdots \rhd_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

  Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \rhd_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.
- $\tau_1 \rhd \tau_2$, ak $\tau_1 \rhd_k \tau_2$ pre nejaké k.
- Ak $\tau \rhd \underline{x}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom x.

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Pre každý rekurzívny funkčný symbol f platí:

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow f(\underline{\vec{x}}) \rhd \underline{y}.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i &= \langle 0, i \rangle && \text{(premenné)}\\
\boldsymbol{0} &= \langle 1, 0 \rangle && \text{(konštanta 0)}\\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3) &= \langle 2, t_1, t_2, t_3 \rangle && \text{(podmienkový výraz)}\\
\boldsymbol{\langle} t \boldsymbol{,} ts \boldsymbol{\rangle} &= \langle 3, t, ts \rangle && \text{(kontrakcia argumentov)}\\
e\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)} &= \langle 4, e, ts \rangle && \text{(aplikácia funkcie)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= \langle 5, 0 \rangle && \text{(funkcia nasledovníka)}\\
\boldsymbol{P} &= \langle 6, 0 \rangle && \text{(funcia predchodcu)}\\
\boldsymbol{f}_n &= \langle 7, n \rangle && \text{(funkčná premenná)}\\
\boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.}\, t &= \langle 8, n, t \rangle. && \text{(definovaná funkcia)}
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Kontrakcia argumentov

- Notačná konvencia pre kontrakčnú funkciu:

$$\langle t_1, t_2, ts\rangle \equiv \big\langle t_1, \langle t_2, ts\rangle\big\rangle.$$

- Kontrakciou n-tice argumentov $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{N}^n$ rozumieme číslo

$$\langle t_1, t_2, \ldots, t_n\rangle \in \mathrm{N}.$$

- Projekčná funkcia $[ts]_i^n$ operuje na kontrakciach argumentov

$$[\langle t_1, t_2, \ldots, t_n\rangle]_i^n = t_i \qquad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Je to primitívne rekurzívna funkcia.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner\tau\urcorner$ resp. $\ulcorner f\urcorner$ je kódom termu τ resp. funkčného symbolu f:

$$
\begin{aligned}
\ulcorner \mathsf{x}_i \urcorner &= \boldsymbol{x}_i \\
\ulcorner 0 \urcorner &= \boldsymbol{0} \\
\ulcorner \mathrm{D}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner &= \boldsymbol{D}(\ulcorner\tau_1\urcorner, \ulcorner\tau_2\urcorner, \ulcorner\tau_3\urcorner) \\
\ulcorner f(\tau_1, \ldots, \tau_n) \urcorner &= \ulcorner f \urcorner \boldsymbol{(}\langle \ulcorner\tau_1\urcorner \boldsymbol{,} \ldots \boldsymbol{,} \ulcorner\tau_n\urcorner \rangle\boldsymbol{)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ulcorner \mathrm{S} \urcorner &= \boldsymbol{S} \\
\ulcorner \mathrm{P} \urcorner &= \boldsymbol{P} \\
\ulcorner \mathfrak{f}_n \urcorner &= \boldsymbol{f}_n \\
\ulcorner \lambda_n . \tau \urcorner &= \boldsymbol{\lambda}_n \boldsymbol{.} \ulcorner\tau\urcorner .
\end{aligned}
$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Príklad

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \textbf{if } x \neq 0 \textbf{ then } \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x) + y\big) \textbf{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq \mathsf{D}\big(x_1, \mathsf{S}\big(\mathsf{P}(x_1) + x_2\big), x_2\big).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.\mathsf{D}\Big(x_1, \mathsf{S}\,\mathfrak{f}_2\big(\mathsf{P}(x_1), x_2\big), x_2\Big)$$

a jeho aritmetizácia

$$\boldsymbol{\lambda}_2.\,\boldsymbol{D}\Big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{S}\Big(f_2\big(\langle \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{x}_2\rangle\big)\Big), \boldsymbol{x}_2\Big).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť prvá

Unárna operácia $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ vytvorí kód numerálu $\underline{x} \equiv \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0)$:

$$\ulcorner \underline{x} \urcorner = \ulcorner \overbrace{\mathsf{S} \ldots \mathsf{S}}^{x\text{-krát}}(0) \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\ulcorner \underline{0} \urcorner = \boldsymbol{0} \qquad\qquad \ulcorner \underline{x+1} \urcorner = \boldsymbol{S}(\ulcorner \underline{x} \urcorner).$$

Jej inverzia je funkcia $Dc(t)$, ktorá dekóduje kód numerálu:

$$Dc(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = x.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $Dc(t)$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$Dc(\boldsymbol{0}) = 0 \qquad\qquad Dc\,\boldsymbol{S}(t) = Dc(t) + 1.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť druhá

Predikát $Nm(t)$ platí, ak číslo t je kódom nejakého numerálu:

$$Nm(t) \leftrightarrow \exists x\, t = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Jej charakteristická funkcia $Nm_*(t)$ je primitívne rekurzívna:

$$\begin{aligned}
&Nm_*(\boldsymbol{0}) = 1 \\
&Nm_*\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} = 1 \leftarrow Nm(t) = 1 \\
&Nm_*\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} = 0 \leftarrow Nm(t) \neq 1 \\
&Nm_*(t) = 0 \leftarrow \neg\big(t = \boldsymbol{0} \vee \exists t_1\, t = \boldsymbol{S(}t_1\boldsymbol{)}\big).
\end{aligned}$$

Predikátová forma uvedenej definície

$$\begin{aligned}
&Nm(\boldsymbol{0}) \\
&Nm\, \boldsymbol{S(}t\boldsymbol{)} \leftarrow Nm(t).
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Substitúcia

Ternárna funkcia $t[e; rs]$ je aritmetizácia operácie substitúcie $\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{\vec{x}}]$ nad rekurzívnymi termami:

$$\ulcorner\tau\urcorner[\ulcorner\lambda_n.\sigma\urcorner; \langle\ulcorner\underline{x_1}\urcorner, \ldots, \ulcorner\underline{x_n}\urcorner\rangle] = \ulcorner\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{x_1}, \ldots, \underline{x_n}]\urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $t[e; rs]$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_i[e; rs] &= [rs]_i^{Ar(e)} \\
\boldsymbol{0}[e; rs] &= \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{D}(t_1, t_2, t_3)[e; rs] &= \boldsymbol{D}(t_1[e; rs], t_2[e; rs], t_3[e; rs]) \\
\langle t, ts\rangle[e; rs] &= \langle t[e; rs], ts[e; rs]\rangle \\
\boldsymbol{f}_n\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)}[e; rs] &= e\boldsymbol{(}ts[e; rs]\boldsymbol{)} \\
f\boldsymbol{(}ts\boldsymbol{)}[e; rs] &= f\boldsymbol{(}ts[e; rs]\boldsymbol{)} \leftarrow \neg\exists n\, f = \boldsymbol{f}_n.
\end{aligned}$$

Tu $Ar(e)$ je primitívne rekurzívna funkcia taká, že $Ar(\ulcorner f\urcorner) = n$ pre n-árny definovaný rekurzívny funkčný symbol f.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Pomocné operácie

Špecifikácia:

$$Pn(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x \dot{-} 1} \urcorner$$
$$Dn(\ulcorner \underline{x} \urcorner, t_2, t_3) = \mathrm{D}(x, t_2, t_3).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$Pn(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \qquad Dn(\boldsymbol{0}, t_2, t_3) = t_3$$
$$Pn\,\boldsymbol{S}(t) = t \qquad Dn\big(\boldsymbol{S}(t_1), t_2, t_3\big) = t_2.$$

Pomocný primitívny rekurzívny predikát

$$Nms(n, ts) \leftrightarrow \forall i\big(1 \leq i \leq n \rightarrow Nm([ts]_i^n)\big).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Jeden krok výpočtu

Špecifikácia redukčnej funkcie $Rd(t)$:

$$\text{ak } \tau \rhd_1 \rho, \text{ potom } Rd(\ulcorner\tau\urcorner) = \ulcorner\rho\urcorner \qquad Rd(\ulcorner\underline{x}\urcorner) = \ulcorner\underline{x}\urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$\begin{aligned}
Rd(\boldsymbol{0}) &= \boldsymbol{0}\\
Rd\,\boldsymbol{D}(t_1,t_2,t_3) &= Dn(t_1,t_2,t_3) \leftarrow Nm(t_1)\\
Rd\,\boldsymbol{D}(t_1,t_2,t_3) &= \boldsymbol{D}(Rd(t_1),t_2,t_3) \leftarrow \neg Nm(t_1)\\
Rd\langle t, ts\rangle &= \langle t, Rd(ts)\rangle \leftarrow Nm(t)\\
Rd\langle t, ts\rangle &= \langle Rd(t), ts\rangle \leftarrow \neg Nm(t)\\
Rd\,\boldsymbol{S}(t) &= \boldsymbol{S}(Rd(t))\\
Rd\,\boldsymbol{P}(t) &= Pn(t) \leftarrow Nm(t)\\
Rd\,\boldsymbol{P}(t) &= \boldsymbol{P}(Rd(t)) \leftarrow \neg Nm(t)\\
Rd\,(\boldsymbol{\lambda}_n.\,t)(ts) &= t[\boldsymbol{\lambda}_n.\,t; ts] \leftarrow Nms(n,ts)\\
Rd\,(\boldsymbol{\lambda}_n.\,t)(ts) &= (\boldsymbol{\lambda}_n.\,t)(Rd(ts)) \leftarrow \neg Nms(n,ts).
\end{aligned}$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Viac krokov výpočtu

Opakovaným použitím redukčnej funkcie implementujeme vyhodnocovanie uzavretých rekurzívnych termov takto:

$$Eval(t) \simeq \textbf{if } Nm(t) \textbf{ then } t \textbf{ else } Eval\, Rd(t).$$

Ako to celé odštartujeme?

Ak $e = \ulcorner f \urcorner$ pre nejaký n-árny rekurzívny funkčný symbol f, tak stači zavolať

$$Dc\, Eval\, e\boldsymbol{(}\langle \ulcorner \underline{x_1} \urcorner, \dots, \ulcorner \underline{x_n} \urcorner \rangle\boldsymbol{)}.$$

Výsledkom výpočtu je potom číslo $f(x_1, \dots, x_n)$.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Rekurzívne indexy

Symbolom $\varphi_e^{(n)}$ označujeme n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu definovanú predpisom

$$\varphi_e^{(n)} = \begin{cases} f & \text{ak } e = \ulcorner f \urcorner \text{ pre nejaký } n\text{-árny rek. fun. symbol } f, \\ \emptyset^{(n)} & \text{ináč.} \end{cases}$$

Ak $f = \varphi_e^{(n)}$ tak číslo e nazveme rekurzívnym indexom čiastočnej funkcie f. Čísla v tvare $\ulcorner f \urcorner$ sú dobre vytvorené indexy.

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď má rekurzívny index.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia

Symbolom Ψ_n si označíme $(n+1)$-árnu čiastočnú funkciu definovanú predpisom

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

Veta o enumerácií (Kleene)

Pre každé $n \geq 1$, čiastočná funkcia Ψ_n je čiastočne rekurzívna funkcia, ktorá enumeruje (s opakovaním) triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií, t. j. postupnosť

$$\lambda x_1 \ldots x_n \,.\, \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \qquad \textit{pre } e = 0, 1, 2, \ldots$$

je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Dôkaz vety o enumerácii

- Z vety charakterizujúcej rekurzívne indexy plynie, že nasledujúca postupnosť

$$\begin{array}{lllll} & \lambda\vec{x}.\Psi_n(0,\vec{x}) & \lambda\vec{x}.\Psi_n(1,\vec{x}) & \lambda\vec{x}.\Psi_n(2,\vec{x}) & \ldots \\ \text{t.j.} & \varphi_0^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \ldots \end{array}$$

  je enumerácia triedy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.
- Pre dobre vytvorené indexy n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií totiž platí:

$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq \mathit{Dc}\ \mathit{Eval}\ e\big(\langle \ulcorner \underline{x_1} \urcorner, \ldots, \ulcorner \underline{x_n} \urcorner \rangle\big).$$

  Ψ_n je preto čiastočne rekurzívna funkcia.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Enumeračná čiastočná funkcia je univerzálna (platí to aj naopak)

$(n+1)$-árna čiastočná funkcia Ψ_n spĺňa tieto dve podmienky:

- Pre každú n-árnu čiastočne rekurzívnu funkciu f existuje číslo e také, že pre každú n-ticu čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí rovnosť
$$\Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n).$$
- Pre každé číslo e je n-árna čiastočná funkcia f definovaná vzťahom
$$f(x_1, \ldots, x_n) \simeq \Psi_n(e, x_1, \ldots, x_n)$$
čiastočne rekurzívna.

Vravíme, že Ψ_n je univerzálnou pre triedu n-árnych čiastočne rekurzívnych funkcií.

Enumerácia čiastočne rekurzívnych funkcií

Zúplnenie enumeračnej čiastočnej funkcie nie je rekurzívna funkcia

Dôkaz sporom. Predpokladajme napr., že binárna funkcia f:

$$f(e,x) \simeq \begin{cases} \Psi_1(e,x) & \text{ak } \Psi_1(e,x)\downarrow \\ 0 & \text{ak } \Psi_1(e,x)\uparrow \end{cases} \tag{1}$$

je rekurzívna. Potom aj unárna funkcia g definovaná vzťahom

$$g(x) = f(x,x) + 1 \tag{2}$$

je rekurzívna. Existuje teda číslo e také, že pre každé číslo x platí

$$\Psi_1(e,x) \simeq g(x). \tag{3}$$

Odtiaľ $\Psi_1(e,e)\downarrow$. Postupnými úpravami odvodíme spor:

$$g(e) \overset{(2)}{=} f(e,e) + 1 \overset{(1)}{\simeq} \Psi_1(e,e) + 1 \overset{(3)}{\simeq} g(e) + 1.$$

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Evaluator of $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = \begin{cases} M^k(x) & \text{if } P\,M^k(x) \text{ and } k \text{ is the least such number,} \\ 0 & \text{if there is no such number.} \end{cases}$$

Program for computing the evaluator M^*:

$$\exists k\, P M^k(x) \to M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^*\, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k\, P M^k(x) \wedge \neg P(x) \to t\, M(x) < t(x) \wedge \exists k\, P M^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k \left[\exists l\, P M^l(x) \to P M^k(x) \right]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).

Turing completeness and total functional programming

Evaluator of a programming language $\mathcal{L}$

Let M describe a single computation step of $\mathcal{L}$ and P its final configuration. Evaluator of $\mathcal{L}$ is the unlimited iteration of M s.t.

$$M^*(x) = y \leftrightarrow \exists k\big(PM^k(x) \wedge \forall l < k \neg PM^l(x) \wedge y = M^k(x)\big) \vee \\ \neg\exists k\, PM^k(x) \wedge y = 0.$$

Program for computing the evaluator M^*:

$$\exists k\, PM^k(x) \rightarrow M^*(x) = \textbf{if } P(x) \textbf{ then } x \textbf{ else } M^*\, M(x).$$

Condition of regularity of the program:

$$\exists k\, PM^k(x) \wedge \neg P(x) \rightarrow t\, M(x) < t(x) \wedge \exists k\, PM^k M(x),$$

where $t(x) = \mu k\big[\exists l\, PM^l(x) \rightarrow PM^k(x)\big]$ is the number of computation steps from the configuration x (zero for infinite loop).