

# 1-AIN-616 Symbolické programovanie a LISP

Letný semester 2015/16

5. prednáška

Ján Komara

# Obsah 5. prednášky

Primitívne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

Interpreter programovacieho jazyka

Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne indexy

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia triedy primitívne rekurzívnych funkcií

► Základné funkcie:

- konštantná funkcia  $Z(x) = 0$ ,
- funkcia nasledovníka  $S(x) = x + 1$ ,
- identity (projekcie):

$$I_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

pre každé  $1 \leq i \leq n$ .

► Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

► Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \dots, y_n) &= g(y_1, \dots, y_n) \\ f(S(x), y_1, \dots, y_n) &= h(x, f(x, y_1, \dots, y_n), y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia triedy primitívne rekurzívnych funkcií

► Základné funkcie:

- konštantná funkcia  $Z(x) = 0$ ,
- funkcia nasledovníka  $S(x) = x + 1$ ,
- identity (projekcie):

$$I_i^n(\vec{x}) = x_i$$

pre každé  $1 \leq i \leq n$ .

► Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})).$$

► Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= g(\vec{y}) \\ f(S(x), \vec{y}) &= h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}). \end{aligned}$$

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia

- ▶ Základné funkcie:  $Z(x) = 0$ ,  $S(x) = x + 1$ ,  $I_i^n(\vec{x}) = x_i$ .
- ▶ Kompozícia funkcií:  $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ .
- ▶ Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \quad f(S(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

## Sčítanie

$$\begin{array}{ll} 0 + y = y & h(x, z, y) = S I_2^3(x, z, y) \\ x + 1 + y = x + y + 1 & 0 + y = I(y) \\ & S(x) + y = h(x, x + y, y) \end{array}$$

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia

- ▶ Základné funkcie:  $Z(x) = 0$ ,  $S(x) = x + 1$ ,  $I_i^n(\vec{x}) = x_i$ .
- ▶ Kompozícia funkcií:  $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ .
- ▶ Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \quad f(S(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

## Násobenie

$$\begin{array}{ll} 0 \cdot y = 0 & h_2(x, z, y) = I_2^3(x, z, y) + I_3^3(x, z, y) \\ (x + 1) \cdot y = x \cdot y + y & 0 \cdot y = Z(y) \\ & S(x) \cdot y = h_2(x, x \cdot y, y) \end{array}$$

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia

- ▶ Základné funkcie:  $Z(x) = 0$ ,  $S(x) = x + 1$ ,  $l_i^n(\vec{x}) = x_i$ .
- ▶ Kompozícia funkcií:  $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$ .
- ▶ Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \quad f(S(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

## Umocňovanie

$$C_1(x) = S Z(x)$$

$$h_3(y, z, x) = l_3^3(y, z, x) \cdot l_2^3(y, z, x)$$

$$f(0, x) = C_1(x)$$

$$f(S(y), x) = h_3(y, f(y, x), x)$$

$$x^0 = 1$$

$$x^{y+1} = x \cdot x^y$$

$$x^y = f(l_2^2(x, y), l_1^2(x, y))$$

# Primitívne rekurzívne funkcie

## Primitívne rekurzívne funkcie a deklaratívne programovanie

- ▶ Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- ▶ Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- ▶ Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- ▶ Vnorená jednoduchá rekúzia:

$$f(0, y) = g(y)$$

$$f(x + 1, y) = h\left(x, f(x, s_1(x, y)), f(x, s_2(x, y, f(x, s_1(x, y))))\right), y).$$

- ▶ Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f; \vec{x}].$$

Podmienka regularity  $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$  pre rekurzívne volanie  $f(\vec{\rho})$  funkcie  $f$  v terme  $\tau$ .



# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

## Príklad

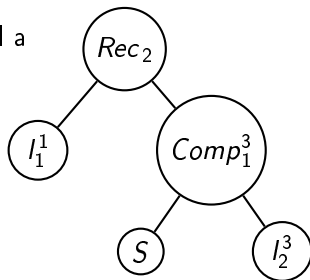
Primitívne rekurzívne odvozenie operácie sčítania

$$\begin{aligned}0 + y &= y \\ x + 1 + y &= x + y + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(x, z, y) &= S I_2^3(x, z, y) \\ 0 + y &= I(y) \\ S(x) + y &= h(x, x + y, y).\end{aligned}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol a jeho syntaktický strom:

$$Rec_2(I_1^1, Comp_1^3(S, I_2^3))$$



# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

## Primitívne rekurzívne funkčné symboly

Trieda  $PR^n$  pozostáva z  $n$ -árnych p.r. funkčných symbolov:

- ▶  $Z \in PR^1$ ,  $S \in PR^1$  a  $I_i^n \in PR^n$  pre  $1 \leq i \leq n$ .
- ▶ Ak  $h \in PR^m$  a  $g_1, \dots, g_m \in PR^n$ , potom

$$Comp_m^n(h, g_1, \dots, g_m) \in PR^n.$$

- ▶ Ak  $g \in PR^n$  a  $h \in PR^{n+2}$ , potom

$$Rec_{n+1}(g, h) \in PR^{n+1}.$$

Ich zjednotenie je množina všetkých p.r. funkčných symbolov

$$PR = \bigcup_{n \geq 1} PR^n.$$

# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

## Interpretácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Symbol  $f \in PR^n$  interpretujeme ako  $n$ -árnu funkciu  $f^{\mathcal{N}}$  nad  $\mathbb{N}$ :

- ▶  $Z^{\mathcal{N}}$  je konštantná funkcia  $Z(x) = 0$ .
- ▶  $S^{\mathcal{N}}$  je funkcia nasledovníka  $S(x) = x + 1$ .
- ▶  $(I_i^n)^{\mathcal{N}}$  je identita  $I_i^n(\vec{x}) = x_i$ .
- ▶  $(Comp_m^n(h, g_1, \dots, g_m))^{\mathcal{N}}$  je funkcia definovaná kompozíciou

$$(Comp_m^n(h, g_1, \dots, g_m))^{\mathcal{N}}(\vec{x}) = h^{\mathcal{N}}(g_1^{\mathcal{N}}(\vec{x}), \dots, g_m^{\mathcal{N}}(\vec{x})).$$

- ▶  $(Rec_n(g, h))^{\mathcal{N}}$  je funkcia definovaná primitívnou rekúziou

$$(Rec_n(g, h))^{\mathcal{N}}(0, \vec{y}) = g^{\mathcal{N}}(\vec{y})$$

$$(Rec_n(g, h))^{\mathcal{N}}(x + 1, \vec{y}) = h^{\mathcal{N}}(x, (Rec_n(g, h))^{\mathcal{N}}(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

## Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$\mathbf{Z} = \langle 1, 0 \rangle \quad (\text{konštantná funkcia})$$

$$\mathbf{S} = \langle 2, 0 \rangle \quad (\text{funkcia nasledovníka})$$

$$\mathbf{I}_i^n = \langle 3, n, i \rangle \quad (\text{identity})$$

$$\langle g, gs \rangle = \langle 4, g, gs \rangle \quad (\text{kontrakcia})$$

$$\mathbf{Comp}_m^n(h, gs) = \langle 5, n, m, h, gs \rangle \quad (\text{kompozícia})$$

$$\mathbf{Rec}_n(g, h) = \langle 6, n, g, h \rangle. \quad (\text{primitívna rekurzia})$$

Pre konštruktor  $\langle g, gs \rangle$  používame podobné notačné konvencie ako pre párovaciu funkciu  $\langle x, y \rangle$ .

# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvození

## Aritmetizácia primitívne rekurzívnych funkčných symbolov

Číslo  $\ulcorner f \urcorner \in \mathbb{N}$  označuje kód (aritmetizáciu) primitívne rekurzívneho funkčného symbolu  $f \in \text{PR}$ . Induktívna definícia:

$$\ulcorner Z \urcorner = \mathbf{Z}$$

$$\ulcorner S \urcorner = \mathbf{S}$$

$$\ulcorner I_i^n \urcorner = \mathbf{I}_i^n$$

$$\ulcorner \text{Comp}_m^n(h, g_1, \dots, g_m) \urcorner = \mathbf{Comp}_m^n(\ulcorner h \urcorner, \langle \ulcorner g_1 \urcorner, \dots, \ulcorner g_m \urcorner \rangle)$$

$$\ulcorner \text{Rec}_n(g, h) \urcorner = \mathbf{Rec}_n(\ulcorner g \urcorner, \ulcorner h \urcorner).$$

# Aritmetizácia primitívne rekurzívnych odvodení

## Príklad

Primitívne rekurzívne odvedenie operácie sčítania

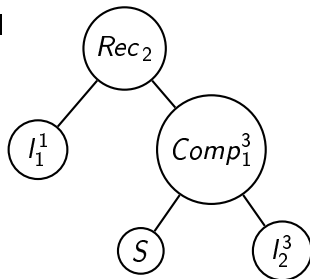
$$\begin{array}{ll} 0 + y = y & h(x, z, y) = S I_2^3(x, z, y) \\ x + 1 + y = x + y + 1 & 0 + y = I(y) \\ & S(x) + y = h(x, x + y, y). \end{array}$$

Primitívne rekurzívny funkčný symbol

$$Rec_2(I_1^1, Comp_1^3(S, I_2^3))$$

a jeho aritmetizácia

$$Rec_2(I_1^1, Comp_1^3(S, I_2^3)).$$



# Interpreter programovacieho jazyka

## Špecifikácia

Interpreter programovacieho jazyka p.r. odvedení je binárna funkcia  $e \bullet x$ , ktorá má tieto dve základné vlastnosti:

- ▶ Pre každé  $f \in \text{PR}^n$  a  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{N}$  platí rovnosť

$$\lceil f \rceil \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle = f^{\mathcal{N}}(x_1, \dots, x_n).$$

- ▶ Pre každé číslo  $e \in \mathbb{N}$ , unárna funkcia  $f$  definovaná vzťahom

$$f(x) = e \bullet x$$

je primitívne rekurzívna funkcia.

# Interpreter programovacieho jazyka

## Implementácia

Diskriminácia podľa konštruktorov p.r. funkčných symbolov:

$e \bullet x = \mathbf{case}$

$$e = Z \Rightarrow 0$$

$$e = S \Rightarrow x + 1$$

$$e = I_i^n \Rightarrow [x]_i^n$$

$$e = \langle g, gs \rangle \Rightarrow \langle g \bullet x, gs \bullet x \rangle$$

$$e = \mathbf{Comp}_m^n(h, gs) \Rightarrow h \bullet (gs \bullet x)$$

$$e = \mathbf{Rec}_n(g, h) \Rightarrow$$

**case**

$$x = \langle 0, y \rangle \Rightarrow g \bullet y$$

$$x = \langle z + 1, y \rangle \Rightarrow h \bullet \langle z, \mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle z, y \rangle, y \rangle$$

$$\mathbf{otherwise} \Rightarrow 0$$

**end**

$$\mathbf{otherwise} \Rightarrow 0$$

**end.**



# Interpreter programovacieho jazyka

## Implementácia

Klauzálna forma rekurzívnej definície:

$$Z \bullet x = 0$$

$$S \bullet x = x + 1$$

$$I_i^n \bullet x = [x]_i^n$$

$$\langle g, gs \rangle \bullet x = \langle g \bullet x, gs \bullet x \rangle$$

$$Comp_m^n(h, gs) \bullet x = h \bullet (gs \bullet x)$$

$$Rec_n(g, h) \bullet \langle 0, y \rangle = g \bullet y$$

$$Rec_n(g, h) \bullet \langle x + 1, y \rangle = h \bullet \langle x, Rec_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \rangle.$$

# Interpreter programovacieho jazyka

## Dobré usporiadanie

Lexikografické usporiadanie dvojíc prirodzených čísel

$$(a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b < d.$$

Je to dobré usporiadanie: každá ostro klesajúca postupnosť

$$(a_1, b_1) >_{\text{lex}} (a_2, b_2) >_{\text{lex}} (a_3, b_3) >_{\text{lex}} (a_4, b_4) >_{\text{lex}} \dots$$

je konečná.

## Transfinitná rekurzia

Podmienky regularity pre interpreter  $e \bullet x$  sú triviálne splnené, napr.

$$\begin{aligned} (\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x, y \rangle) &<_{\text{lex}} (\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle) \\ (h, \langle x, \mathbf{Rec}_n(g, h) \bullet \langle x, y \rangle, y \rangle) &<_{\text{lex}} (\mathbf{Rec}_n(g, h), \langle x + 1, y \rangle). \end{aligned}$$

# Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

## Definícia univerzálnej funkcie

Vravíme, že  $(n+1)$ -árna funkcia  $U_n$  je univerzálnou pre triedu  $n$ -árnych p.r. funkcií, ak sú splnené tieto podmienky:

- ▶ Pre každú  $n$ -árnu p.r. funkciu  $f$  existuje číslo  $e$  také, že pre každú  $n$ -ticu čísel  $x_1, \dots, x_n$  platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n).$$

- ▶ Pre každé číslo  $e$  je  $n$ -árna funkcia  $f$  definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(e, x_1, \dots, x_n)$$

primitívne rekurzívna.

Funkciu  $U_n$  definujeme predpisom

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle.$$

## Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia  $U_1$  nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia  $U_1$  je primitívne rekurzívna. Potom aj unárna funkcia  $f$  definovaná vzťahom

$$f(x) = U_1(x, x) + 1 \quad (1)$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo  $e$  také, že pre každé číslo  $x$  platí rovnosť

$$U_1(e, x) = f(x). \quad (2)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e) \stackrel{(1)}{=} U_1(e, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e) + 1.$$

Spor.

## Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Univerzálna funkcia  $U_n$  nie je primitívne rekurzívna

Dôkaz sporom: predpokladajme, že funkcia  $U_n$  je primitívne rekurzívna. Potom aj  $n$ -árna funkcia  $f$  definovaná vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) = U_n(x_1, x_1, \dots, x_n) + 1 \quad (1)$$

je primitívne rekurzívna. Existuje teda číslo  $e$  také, že pre každú  $n$ -ticu čísel  $x_1, \dots, x_n$  platí rovnosť

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme

$$f(e, \dots, e) \stackrel{(1)}{=} U_n(e, e, \dots, e) + 1 \stackrel{(2)}{=} f(e, \dots, e) + 1.$$

Spor.

## Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie  $U_1$  nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_1(e, x, y) \leftrightarrow U_1(e, x) = y \quad (1)$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj unárny predikát

$$P(x) \leftrightarrow G_1(x, x, 0). \quad (2)$$

Existuje teda číslo  $e$  také, že pre každé číslo  $x$  platí rovnosť

$$U_1(e, x) = P_*(x). \quad (3)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$P(e) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} G_1(e, e, 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} U_1(e, e) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} P_*(e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e).$$

## Univerzálna funkcia pre primitívne rekurzívne funkcie

Graf univerzálnej funkcie  $U_n$  nie je primitívne rekurzívny

Dôkaz sporom: predpokladajme, že graf univerzálnej funkcie

$$G_n(e, x_1, \dots, x_n, y) \leftrightarrow U_n(e, x_1, \dots, x_n) = y \quad (1)$$

je p.r. predikát. Potom je primitívne rekurzívny aj  $n$ -árny predikát

$$P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow G_n(x_1, x_1, \dots, x_n, 0). \quad (2)$$

Existuje teda číslo  $e$  také, že pre každú  $n$ -ticu čísel  $x_1, \dots, x_n$  platí

$$U_n(e, x_1, \dots, x_n) = P_*(x_1, \dots, x_n). \quad (3)$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme spor:

$$\begin{aligned} P(e, \dots, e) &\stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} G_n(e, e, \dots, e, 0) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} U_n(e, e, \dots, e) = 0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow P_*(e, \dots, e) = 0 \Leftrightarrow \neg P(e, \dots, e). \end{aligned}$$

# Primitívne rekurzívne indexy

## Definícia

Prirodzené číslo  $e$  také, že

$$\forall x_1 \dots \forall x_n f(x_1, \dots, x_n) = e \bullet \langle x_1, \dots, x_n \rangle,$$

sa nazýva primitívne rekurzívny index funkcie  $f$ .

## Veta

*Funkcia je primitívne rekurzívna práve vtedy, keď má primitívne rekurzívny index.*