Cantorova párovacia funkcia

Celočíselná odmocnina. Zápis $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ označuje celočíselnú odmocninu prirodzeného čísla x. Je to funkcia na $\mathbb{N}$ definovaná predpisom:

$$\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor = y \leftrightarrow y^2 \leq x < (y+1)^2. \tag{1}$$

Podmienka jednoznačnosti pre (1)

$$y_1^2 \leq x < (y_1+1)^2 \wedge y_2^2 \leq x < (y_2+1)^2 \to y_1 = y_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti perfektných štvorcov

$$y_1 < y_2 \to y_1^2 < (y_1+1)^2 \leq y_2^2 < (y_2+1)^2.$$

Existenčná podmienka pre (1)

$$\forall x \exists y\, y^2 \leq x < (y+1)^2$$

plynie z faktu, že funkcia $\lambda x.x^2$ na $\mathbb{N}$ má neohraničený obor hodnôt obsahujúci číslo 0.

Trojuholníkové čísla. Zápis T_n označuje funkciu na $\mathbb{N}$ ktorej hodnoty sú trojuholníkové čísla:

$$\mathrm{T}_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=0}^{n} i. \tag{2}$$

Nasledujúca vlastnosť trojuholníkových čísel sa dokáže pramočiaro matematickou indukciou

$$8\mathrm{T}_n + 1 = (2n+1)^2. \tag{3}$$

Pravá inverzná funkcia. Zápis T_n^{-1} označuje pravú inverznú funkciu k T_n:

$$\mathrm{T}_n^{-1} = m \leftrightarrow \mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1}. \tag{4}$$

Podmienka jednoznačnosti pre (4)

$$\mathrm{T}_{m_1} \leq n < \mathrm{T}_{m_1+1} \wedge \mathrm{T}_{m_2} \leq n < \mathrm{T}_{m_2+1} \to m_1 = m_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti trojuholníkových čísel

$$m_1 < m_2 \to \mathrm{T}_{m_1} < \mathrm{T}_{m_1+1} \leq \mathrm{T}_{m_2} < \mathrm{T}_{m_2+1}.$$

Existenčná podmienka pre (4)

$$\forall n \exists m\, \mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1}$$

plynie z faktu, že obor funkcie T_m je neohraničený a obsahuje číslo 0.

Teraz vyjadrime pravú inverznú funkciu k T_n s pomocou celočíselnej odmocniny. Postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1} \Rightarrow 8\mathrm{T}_m + 1 \leq 8n + 1 < 8\mathrm{T}_{m+1} + 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \\
&(2m+1)^2 \leq 8n + 1 < (2(m+1)+1)^2 = (2m+3)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \\
&2m + 1 \leq \left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor \leq 2m + 2 \Rightarrow 2m \leq \left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1 \leq 2m + 1 \Rightarrow \\
&m \leq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = m.
\end{aligned}$$

Platí preto

$$\mathrm{T}_n^{-1} = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor = \left(\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1 \right) \div 2.$$

Cantorova párovacia funkcia. Injekcie z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ sa nazývajú párovacie funkcie. Jednou z najjednoduchších surjektívnych párovacích funkcií je Cantorova párovacia funkcia J, ktorá je zobrazená na obrázku:

$J(x,y)$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	22	29	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	30	38	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	39	48	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	49	59	$\cdots$
5	20	26	33	41	50	60	71	$\cdots$
6	27	34	42	51	61	72	84	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Funkcia je definovaná vzťahom:

$$\mathrm{J}(x,y) = \left| \left\{ (a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a + b < x + y \vee a + b = x + y \wedge a < x \right\} \right|. \tag{5}$$

Aby sme našli jej numerické vyjadrenie, využijeme nasledujúce identity, ktoré plynú priamo z definície (5):

$$\mathrm{J}(x,y) = \mathrm{J}(0,x+y) + x \tag{6}$$
$$\mathrm{J}(0,x+y) = \left|\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a+b < x+y\right\}\right|. \tag{7}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(x,y) &\overset{(6)}{=} \mathrm{J}(0,x+y) + x \overset{(7)}{=} \left|\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a+b < x+y\right\}\right| + x = \\ &= \sum_{d<x+y} \left|\left\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; a+b = d\right\}\right| + x = \sum_{d<x+y} (d+1) + x = \\ &= \sum_{d\le x+y} d + x = \mathrm{T}_{x+y} + x.\end{aligned}$$

Preto

$$\mathrm{J}(x,y) = \sum_{i=0}^{x+y} i + x = \mathrm{T}_{x+y} + x. \tag{8}$$

Diagonálna vlastnosť. Platí

$$\mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)} = x + y. \tag{9}$$

Z nasledujúcich úprav

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{x+y} = \mathrm{T}_{0+x+y} + 0 \overset{(8)}{=} \mathrm{J}(0,x+y) \overset{(6)}{\le} \mathrm{J}(x,y) \overset{(5)}{<} \\ < \mathrm{J}(0,x+y+1) \overset{(8)}{=} \mathrm{T}_{0+x+y+1} + 0 = \mathrm{T}_{x+y+1}\end{aligned}$$

plynie nerovnosť

$$\mathrm{T}_{x+y} \le \mathrm{J}(x,y) < \mathrm{T}_{x+y+1}.$$

Odtiaľ a z (4) dostaneme požadovanú identitu (9).

Projekcie. Prvá a druhá projekcia Cantorovej párovacej funkcie sú unárne funkcie K a L také, že

$$\mathrm{K}\,\mathrm{J}(x,y) = x \tag{10}$$
$$\mathrm{L}\,\mathrm{J}(x,y) = y. \tag{11}$$

Funkcie definujeme explicitne vzťahom

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(x) &= x - \mathrm{J}(0, \mathrm{T}_x^{-1})\\ \mathrm{L}(x) &= \mathrm{T}_x^{-1} - \mathrm{K}(x).\end{aligned}$$

Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathrm{K}\,\mathrm{J}(x,y) &= \mathrm{J}(x,y) - \mathrm{J}(0, \mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)}) \overset{(9)}{=} \mathrm{J}(x,y) - \mathrm{J}(0, x+y) \overset{(6)}{=}\\ &= \mathrm{J}(0, x+y) + x - \mathrm{J}(0, x+y) = x\\ \mathrm{L}\,\mathrm{J}(x,y) &= \mathrm{T}^{-1}_{\mathrm{J}(x,y)} - \mathrm{K}\,\mathrm{J}(x,y) \overset{(9),(10)}{=} x + y - x = y.\end{aligned}$$