Kapitola 1

Úvod

Trojsemestrálny kurz matematického programovania.

- 1.semester - Základy funkcionálneho programovania (deklaratívneho) programovania v jazyku CL.
- 2.semester - Výroková, predikátová logika, dokazovanie v proof systéme CL.
- 3.semester - Dokazovanie vlastností programov (hlavne pomocou indukcie) s využitím znalostí z 1. a 2. semestra.

1.1 Imperatívne programovanie verzus deklaratívne programovanie

1.1.1 Imperatívne programovanie.

- Programy sú postupnosti príkazov, recepty ako niečo spraviť.
- Výpočet pozostáva z vykonávania príkazov, ktoré modifikujú pamäť.
- Ťažká otázka: čo vlastne program počíta, aké sú jeho vlastnosti, či spĺňa nami požadované vlastnosti (špecifikáciu).
- V teoretickej informatike existuje komplikovaná, dosť neprehľadná teoria - sémantika procedurálnych programov, ktorá sa snaží riešiť tieto spomenuté ťažké otázky.
- Jazyky: PASCAL, C, C++, FORTRAN, COBOL, ASSEMBLER.

1.1.2 Deklaratívne programovanie.

- Má matematické základy, pracujeme s matematickými objektami.
- Programy sú vlastne definície funkcií a predikátov.
- Zhruba podľa toho rozdelenie na funkcionálne a logické programovanie.
- Na zápis samotných definícií funkcií a predikátov (ako program počíta) a vlastností, špecifikácií (čo program počíta) používame jednotne **ten istý** *jazyk logiky*.
- *Jazyk logiky* pozostáva z nasledujúcich množín symbolov:
  - množina premenných: $x, y, z, \ldots$
  - množina funkčných symbolov: $f, g, h, \ldots$
  - množina predikátových symbolov: $p, q, r, \ldots$
  - množina logických spojok: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
  - množina kvantifikátorov: $\forall, \exists$
  - množina pomocných symbolov: $'(', ')', ','$
- Z matematickej algebry a analýzy už máte bohatú prax v zapisovaní vlastností a definícií matematických objektov pomocou logických formúl v hore uvedenom jazyku. Teraz ju len rozšírime na programovanie.
- Výpočet hodnoty pre nejakú definovanú funkciu je vlastne vyhodnocovanie, zjednodušovanie, prepisovanie výrazov do základného ďalej už neredukovateľného tvaru. Pre ilustráciu uvažujme nasledovnú jednoduchú definíciu funkcie $F(x)$:

  $F(x) = 2 \cdot (x + 4)$.

  Potom výpočet hodnoty $F(3)$ bude takéto vyhodnocovanie, prepisovanie výrazov: $F(3) = 2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$. Intuitívne vidíme, že decimálna konštanta 14 je dostatočne jednoduchý výraz (pre užívateľa), ktorý už nemá zmysel ďalej redukovať. V ďalšom texte sa k pojmu výpočtu ešte podrobnejšie vrátime a ukážeme si mnohé už menej triviálne príklady.
- Jazyky: LISP, SCHEME, HASKELL, MIRANDA, ML, CL, TRILOGY (funkcionálne), PROLOG (logický).

1.2 Úvod do CL

V tomto semestri sa budeme učit programovať a osvojovať si základné (programovacie) techniky funkcionálneho programovania v jazyku CL, ktorého autormi sú doc. Voda a Ing. Komara. Jazyk CL je jednoduchý ľahko naučiteľný elegantný pedagogicky vhodný predstaviteľ funkcionálneho programovania. Jeho syntax priamo vychádza z matematických definícií funkcií. V jazyku CL budeme programovať iba funkcie nad $\mathbb{N}$ (čo je pre informatiku úplne postačujúce).

1.2.1 Matematické definície funkcií. Matematické definície funkcií môžeme rozdeliť na explicitné a na induktívne (rekurzívne). Explicitnú definíciu funkcie môžeme schématicky zapísať nasledovne:

$$F(\bar{a}) = \begin{cases} V_1 & \text{if } cond_1(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots \\ V_n & \text{if } cond_n(\bar{a}), \end{cases}$$

kde $F(.)$ sa už nevyskytuje vo V_i a $cond_i(\bar{a})$. Ak chceme definovať funkciu F nad nejakou množinou, doménou D, aby definícia bola naozaj korektná, musí spĺňať dve vlastnosti.

1. Výlučnosť: pre ľubovoľné argumenty $\bar{a}$ existuje najviac jeden riadok s podmienkou $cond_i(\bar{a})$ splnenou.

2. Úplnosť: pre ľubovoľné argumenty $\bar{a}$ existuje aspoň jeden riadok s podmienkou $cond_i(\bar{a})$ splnenou.

Čiže dokopy: pre ľubovoľné argumenty $\bar{a}$ existuje práve jeden riadok s podmienkou $cond_i(\bar{a})$ splnenou. Z výlučnosti a úplnosti sa dá dokázať, že existuje práve jedna funkcia F nad D, ktorá spĺňa danú definíciu. Platí, že

$$\left.\begin{array}{l} \text{z úplnosti} \Rightarrow \text{jednoznačnosť} \\ \text{z výlučnosti} \Rightarrow \text{existencia} \end{array}\right\} \text{funkcie.}$$

1.2.2 Nesprávne príklady. Teraz si uvedieme nekorektné definície funkcií:

Neúplna definícia:

$$F(\bar{a}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 3 \\ 2 & \text{if } x < 3. \end{cases}$$

Pre $x = 3$ nemá určenú hodnotu, čiže nekoňečne veľa funkcií tvaru

$F(0) = f(1) = f(2) = 2$
$F(3) = n \in \mathbb{N}$
$F(x) = 1$ *pre* $x > 3$

vyhovuje definícii.

Nevýlučná definícia:

$$F(\bar{a}) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 3 \\ 2 & \text{if } x \leq 3. \end{cases}$$

Platí, že $F(3) = 1 \neq 2 = F(3)$, teda vyhovujúca funkcia neexistuje.

1.2.3 Úvod do syntaxe jazyka CL. Teraz si spravíme malý úvod do syntaxe jazyka CL, aby sme vedeli písať (programovať) jednoduché explicitné definície. Podobne ako pri explicitných matematických definíciach, aj explicitná CL-definícia sa skladá z niekoľkých riadkov (odpovedajú riadkom matematickej definície) nazývaných *klauzulami.* Klauzula má tvar

$$F(a_1, \ldots, a_k) = v \leftarrow t_1 Rel_1 t_2 \ \& \cdots \& \ t_{2n-1} Rel_n t_{2n}$$

(v matematickom zápise namiesto & používame $\wedge$), kde

1. F je identifikátor definovanej funkcie, alfa-numerický reťazec začínajúci sa s veľkým písmenom. Vo vnútri reťazca nie je už dovolené veľké písmeno, ale môžeme použiť _ (napríklad: *Max_3*);

2. a-čka, v-čko, t-čka sú termy (ako v logike) definované induktívne:
   Term je
   (a) premenná (reťazec z malých písmien, môže sa končiť jedno alebo dvojciferným indexom $x1$, $x99$, $x0 \equiv x$, $x00 \equiv x$),
   (b) číslo - prírodzené decimálne (konštanta),
   (c) výraz $F(t_1, \ldots, t_n)$ (kde F je identifikátor funkcie a t-čka sú termy).

V CL-ku sú zabudované aritmetické relácie:

=	$\neq$	<	>	$\leq$	$\geq$	matematický zápis
=	!=	<	>	<=	>=	ASCII zápis v CL-ku.

Ďalej v CL-ku sú zabudované nasledujúce aritmetické funkcie, ktoré budeme používať (sú binárne, preto sa dajú písať infixne):

násobenie	$x \cdot y$	ASCII *
sčítanie	$x + y$	ASCII +,

modifikované odčítanie

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{if } x \geq y \\ 0 & \text{if } x < y \end{cases} \qquad \text{ASCII -}$$

(klasické odčítanie nie je uzavreté na $\mathbb{N}$),
celočíselné delenie a zvyšková funkcia

$x \div y$	ASCII x/y
$x \mod y$	ASCII x mod y,

ktoré spĺňajú

$$y > 0 \rightarrow x = (x \div y) \cdot y + x \bmod y \wedge x \bmod y < y$$
$$x \div 0 = x \mod 0 = 0.$$

1.2.4 Príklady explicitne definovaných funkcii nad $\mathbb{N}$ a ich zápis v jazyku CL.

Druhá mocnina.

$$Power(x) = x \cdot x.$$

V CL to isté.

Maximum.

$$max(x,y) = \begin{cases} x & \text{if } x > y \\ y & \text{if } x \leq y \end{cases}.$$

V CL:

$max(x,y) = x \leftarrow x > y$
$max(x,y) = y \leftarrow x \leq y$,

zápis v **if_then_else** forme:

max(x,y) = **if** x > y **then** x
else y .

Funkcia $F1$.

$$F1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < y \\ 2 & \text{if } x = y \\ 3 & \text{if } x > y \end{cases}.$$

V jazyku CL:

$F1(x,y) = 1 \leftarrow x < y$
$F1(x,y) = 2 \leftarrow x = y$
$F1(x,y) = 3 \leftarrow x > y$,

zápis v **if_then_else** forme:

$F1$(x,y) = **if** x < y **then** 1
else **if** x = y **then** 2
else 3 .

Funkcia $F2$.

$$F2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y \\ 2 & \text{if } x \neq y \end{cases}.$$

V jazyku CL:

$F2(x,y) = 1 \leftarrow x = y$
$F2(x,y) = 2 \leftarrow x \neq y$,

zápis v **if_then_else** forme:

$F2$(x,y) = **if** x = y **then** 1
else 2 .

Funkcia $F3$.

$$F3(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{if } x < y \wedge y = z \\ 2 & \text{if } x < y \wedge y \neq z \\ 3 & \text{if } x \geq \wedge y \leq z \\ 4 & \text{if } x \geq \wedge y > z \end{cases}.$$

V jazyku CL:

$F3(x,y,z) = 1 \rightarrow x < y \wedge y = z$
$F3(x,y,z) = 2 \rightarrow x < y \wedge y \neq z$
$F3(x,y,z) = 3 \rightarrow x \geq y \wedge y \leq z$
$F3(x,y,z) = 4 \rightarrow x \geq y \wedge y > z$,

zápis v **if_then_else** forme:

$F3$(x,y) = **if** x < y **then** **if** y = z **then** 1 **else** 2
else **if** y ≤ z **then** 3 **else** 4 .

1.2.5 Výpočet v CL.

Neformálne, výpočet v CL prebieha: zlava-doprava po stĺpcoch. Dosadíme za premenné argumenty, skočíme za ← a v stĺpcoch vyselektujeme odpovedajúci riadok, ktorého hodnotu (hodnota termu za =) priradíme danej aplikovanej funkcie na zadané argumenty. V jazyku CL chceme dovoliť iba výlučné a úplné explicitné definície. Dokazovať výlučnosť a úplnosť definície však môže byť netriviálny problém. Pri výlučnosti kompilátor dokáže rozpoznávať iba syntakticky zrejmé prípady. Tento proces sa volá diskriminácia. Na úvod si uvedieme diskrimináciu pomocou aritmetických relácií.

1. Definícia musí mať rovnaký začiatok $F(\bar{a})$ vo všetkých riadkoch;

2. za ← máme stĺpce tvaru:

	dichotómia	trichotómia
$x = y$	$x < y$	$x < y$
$x \neq y$	$x \geq y$	$x = y$
		$x > y$
	analogicky	
	$x > y$	
	$x \leq y$	;

3. riadky v stĺpci sa môžu opakovať, permutovať (počítame zľava do prava po stĺpcoch, preto na poradí riadkov nezáleží);

4. pre vnorený podprípad začiatok z musí byť rovnaký, napríklad:

$$\begin{aligned} &\leftarrow z \wedge r_1 \\ &\leftarrow z \wedge r_2 \\ &\leftarrow z \wedge r_3. \end{aligned}$$

Úplnosť definície sa zabezpečí oveľa jednoduchšie. Ak sa pri vyhodnotení nevyskytuje žiadny riadok defaultovo vezmeme 0 ako hodnotu funkcie pre dané argumenty. Implicitne predpokladáme, že v definícii je riadok tvaru $F(.) = 0 \leftarrow$ otherwise.

Príklady:
(Neúplná trichotómia)

$F(x) = 1 \leftarrow x = 5$
$F(x) = 2 \leftarrow x > 5$

pre $x < 5$ $F(x) = 0$, alebo

$F(x) = 10 \leftarrow x = 5$

pre $x \neq 5$ $F(x) = 0$.

Kapitola 2

Induktívne definície

Teraz si povieme niečo o induktívnych (rekurzívnych) definíciach. V matematike ste sa neraz stretli napríklad s nasledovnými induktívnymi definíciami:

- mocnina s prírodzeným exponentom:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ x^{n+1} &= x \cdot x^n \end{aligned}$$

- faktorial:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ (n+1)! &= (n+1) \cdot n! \end{aligned}$$

- Fibonacciho funkcia:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n+1) + F(n). \end{aligned}$$

Všeobecne induktívne definície funkcií môžeme schématicky zapísať nasledovne:

$$F(\bar{a}) = \begin{cases} V_1 & cond_1(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots \\ V_n & cond_n(\bar{a}), \end{cases}$$

čo sa veľmi podobá na schému explicitných definícií. Rozdiel je v tom, že táto schéma je všeobecnejšia, totiž umožnuje, aby sa term tvaru $F(.)$ vyskytoval aj vo V-čkach a $cond_i(\bar{a})$. Opäť chceme, aby naša definícia nám korektne definovala jednu funkciu F nad doménou D. K tomu budeme potrebovať, aby definíciu okrem výlučnosti a úplnosti spĺňala i podmienku *regularity*: existuje funkcia - miera z $D^{\mathrm{ar}(F)} \to \mathbb{N}$, taká, že pre ľubovoľnú aplikáciu funkcie F - $F(\bar{b})$ z pravej strany definície (za svorkou) vyskytujúcej sa vo V-čkach či $cond_i(\bar{a})$, musí platiť, že $m(\bar{a}) > m(\bar{b})$.

2.0.6 Kontrapríklady. Uvažujme nasledovnú definíciu: $F(x) = F(x)$ funkcie nad $\mathbb{N}$. Tá je zrejme úplná a výlučná, ale nie regulárna, lebo nemôže existovať taká funkcia-miera m, že $m(x) > m(x)$. Definícii vyhovuje ľubovoľná funkcia nad $\mathbb{N}$, čiže definícia neurčuje jednoznačne funkciu.

Podobne definícia: $F(x) = F(x) + 1$ je úplná a výlučná, ale nie je regulárna, lebo opäť nemôže existovať miera m, že $m(x) > m(x)$. Ďalej pre žiadnu funkciu nemôže platiť, že $F(x) = F(x) + 1$, z toho vyplýva, že daná definícia neurčuje žiadnu funkciu.

Summa summarum, ak porušíme podmienku regularity, môže sa stať že neexistuje žiadna funkcia vyhovujúca definícii alebo viacero rôznych funkcií jej vyhovuje.

Na vytváranie induktívnych definícii nám budú postačovať znalosti z CL-syntaxe uvedené pri explicitných definíciach. Okrem diskriminácie pomocou aritmetických výrazov budeme používať ďalší typ klauzálnych definícií využívajúcich diskrimináciu na prirodzených číslach. V hlavách klauzúl sa bude vyskytovať stĺpec tvaru:

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ n+(k+1), \end{array}$$

kde $k \in \mathbb{N}$ a argumenty nachádzajúce sa naľavo od tohoto stĺpca (v hlave klauzuly) musia byť vo všetkých riadkoch-klauzulách identické.

V ďalšom texte už budeme uvádzať iba CL-definície nakoľko sú veľmi podobné matematickým a ich vzájomný prepis je priamočiary.

2.1 Príklady

Ako vyzerá výpočet pomocou induktívnych, rekurzívnych definícií ? Minule sme si niečo povedali o výpočte pomocou explicitných definícií. Teraz si naše intuitívne znalosti rozšírime. Mohli by sme charakterizovať výpočet vo funkcionálnom programovaní ako vyhodnocovanie výrazov - technickejšie ako prepisovanie (redukcia) výrazov (termov) do nejakých základných, ireducibilných, ďalej sa už neprepisujúcich tvarov. Uvažujme nasledujúce jednoduché príklady:

2.1.1 Mocnina.

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ x^{n+1} &= x.x^n \qquad \text{pre } (n \geq 0) \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ako by sme ju spravili v Pascali pomocou cyklov?

Môžeme ju naprogramovať napríklad pomocou **while**-cyklu:

```
p := 1;
i := n;
{ invariant }  ←
while i>0  do
   begin
      p := x*p;
      i := i-1
   end.
```

Tento cyklus nám reprezentuje jeden typ výpočtu mocniny. Klesajúci parameter cyklu je i, testuje sa či je $i > 0$, po každom zbehnutí tela cyklu sa nám zníži o jedna; z toho vyplýva, že cyklus skončí. Invariant cyklu (podmienka nemeniaca sa počas cyklu, platí na začiatku aj na konci cyklu v bode $\leftarrow$) bude:

$$x^n = p \cdot x^i \ \wedge \ i \geq 0.$$

1. Na začiatku máme $i = n \geq 0,\ x^n = 1 \cdot x^n$.
2. Ak cyklus zbehol, tak muselo $i > 0$. Vieme, že pre $i > 0$ platí $x^n = p \cdot x \cdot x^{i-1} = \bar{p} \cdot x^{\bar{i}}$. Súčasne $\bar{i} \geq 0$. Čiže invariant platí aj pre nové hodnoty $\bar{p}$ a $\bar{i}$ po vykonaní cyklu.
3. Na konci máme $i = 0$, $x^n = p \cdot x^0 = p \cdot 1 = p$.

Z platnosti invariantu teda vidíme, že cyklus naozaj korektne vypočíta mocninu do premennej p.

CL-definícia:

$Power(x, 0) = 1$
$Power(x, n+1) = x \cdot Power(x, n)$.

Výpočet (neformálne) pre $x = 2;\ n = 5$ odsimulujume nasledovne:

$$\begin{aligned} Power(2,5) &= 2 \cdot Power(2,4) = 2 \cdot 2 \cdot Power(2,3) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot Power(2,2) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot Power(2,1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot Power(2,0) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 32; \end{aligned}$$

1. dosadíme za premenné
2. vyselektujeme (pomocou diskriminácii) vhodný riadok
3. prepíšeme výraz výrazom na prvej strane = vybratého riadku.

V CL-ku môžeme spraviť nasledovnú definíciu mocniny, pomocou ktorej môžeme mať podobný výpočet ako pri **while**-cykle:

začiatok	po 1.zbehu	po 2.zbehu	3.zbehu	4.zbehu	5.zbehu
p = 1	2	4	8	16	32
i = 5	4	3	2	1	0

Obrázok 2.1: Výpočet pre $x = 2$ a $n = 5$.

$Power(x, i, m) = Pow1(x, n, 1)$
$Pow1(x, 0, m) = m$
$Pow1(x, n+1, m) = Pow1(x, i, x * m)$.

Výpočet pre $x = 2,\ n = 5$:

$$\begin{aligned} Power(2,5) &= Pow1(2,5,1) = Pow1(2,4,2) \\ &= Pow1(2,3,4) = Pow1(2,2,8) \\ &= Pow1(2,1,16) = Pow1(2,0,32) = 32. \end{aligned}$$

1. Vidíme, že výpočty sú analogické - rovnaká modifikácia i, p pri **while**-cykle a 2., 3. argumentu pri $Pow1$.
2. 3. argument, m, je miesto, kam si odkladáme medzivýsledky, takzvaný akumulátor, preto sa takáto technika nazýva technikou akumulátorovej premennej.
3. Tento typ rekurzie, keď po vyhodnotení rekurzívneho volania už nemusíme nič dovyhodnocovať v žiadnom prípade, nazveme chvostová rekurzia - *tail recursion*. Na rozdiel od prvej definície, kde sme museli ešte donásobovať dvoma, a ktorá je čisto rekurzívna.

Kompilátor dokáže rozpoznať, či ide o tail rekurziu a vtedy ju implementuje pomocou cyklu (efektívne). Čiže i vo funkcionálnom programovaní môže byť výpočet dlhý, neefektívny alebo naopak krátky a efektívny. Záleží na zručnosti programátora.

Do tretice pomocou **for**-cyklu:

p:=1;
for i=1 **to** n **do** p := x*p

Cyklus **for** vždy skončí, ak $n \geq 0$ uskutoční sa n-krát. Klesajúci parameter je $n - i + 1$. Pre $n \geq 0$ platí invariant $x^n = p \cdot x^{n-i+1}$:

1. Na začiatku máme $i = 1,\ p = 1$. Platí $x^n = 1 \cdot x^{n-1+1}$.
2. Pre $i \leq n$ dostávame $x^n = p \cdot x \cdot x^{n-i-1+1} = \bar{p} \cdot x^{n-\bar{i}+1}$.
3. Na konci máme $i = n+1,\ p := x^n$. Teda $x^n = x^n \cdot x^{n-(n+1)+1} = x^n \cdot x^0 = x^n$

začiatok	po 1.zbehu	po 2.zbehu	3.zbehu	4.zbehu	5.zbehu
p = 1	2	4	8	16	32
i = 1	2	3	4	5	6

Obrázok 2.2: Výpočet pre $x = 2$ a $n = 5$.

$Power(x, n) = Pow2(x, 1, n, 1)$
$Pow2(x, i, n, m) = m \leftarrow i > n$
$Pow2(x, i, n, m) = Pow2(x, i+1, n, x \cdot m) \leftarrow i \leq n$

Výpočet pre $x = 2,\ n = 5$:

$$\begin{aligned} Power(2,5) &= Pow2(2,1,5,1) = Pow2(2,2,5,2) \\ &= Pow2(2,3,5,4) = Pow2(2,4,5,8) \\ &= Pow2(2,6,5,32) = 32\ . \end{aligned}$$

1. Opäť sa využíva technika akumulátorovej premennej, naviac máme argument pre n - 'hornú hranicu cyklu'.
2. Definícia je tail - rekurzívna. Kompilátor ju nahradí cyklom.
3. Výpočet je analogický ako výpočet pomocou **for** cyklu. Nasledovné premenné si odpovedajú:
   (a) i, p vo **for** cykle a
   (b) i, m - 2. a 4. argument v $Pow2$.

2.1.2 Najväčší spoločný deliteľ.

Nech $x,\ y \in \mathbb{N}$ chceme nájsť najväčšieho spoločného deliteľa z, kde z má spĺňať podmienku:

$$z|x \wedge z|y \wedge \forall d\,(d|x \wedge d|y \rightarrow d \leq z).$$

V prípade, že $x + y > 0$ ($x > 0$ alebo $y > 0$), z je určené jednoznačne. Pre prípad $x + y = 0$, pre $\forall z \in \mathbb{N}$ platí $z|0$, čiže najväčšie z s touto vlastnosťou neexistuje, preto definitoricky položíme $Gcd(0,0) = 0$.

Našou úlohou bude teda nájsť funkciu $Gcd(x, y)$, ktorá bude splňať nasledovnú špecifikáciu:

$$\begin{aligned} \forall x \forall y (x + y > 0 \rightarrow Gcd(x,y)|x \wedge Gcd(x,y)|y \wedge \\ \forall d[d|x \wedge d|y \rightarrow d \leq Gcd(x,y)]). \end{aligned}$$

Určili sme si, čo chceme počítať. Ako to počítať?

začiatok	po 1.zbehu	po 2.zbehu	3.zbehu	4.zbehu
xi = 12	21	12	9	3
yi = 21	12	9	3	0
zi = ?	12	9	3	0

Obrázok 2.3: Výpočet pre $x = 12$ a $y = 21$.

Napríklad pomocou nasledovnej verzie Euklidovho algoritmu:

```
xi := x;
yi := y;
while yi > 0 do
   begin
     zi := xi mod yi;
     xi := yi;
     yi := zi
   end
gcd := xi;
```

Klesajúci parameter cyklu bude yi (≥ 0).

1. Testujeme či $yi > 0$.
2. Vieme, že nová hodnota yi bude $xi \mod yi$ < ako stará hodnota yi. Čiže hodnota yi sa zmenší po každom prechode cyklom. Cyklus nám skončí, vtedy $yi = 0$.

Ak $x + y > 0$, invariant bude $gcd(x, y) = gcd(xi, yi)$.

1. Na začiatku máme $x = xi,\ y = yi$.
2. Vieme, že pre $yi > 0$ platí:

$$gcd(x, y) = gcd(xi, yi)$$
$$gcd(yi, xi \mod yi) = gcd(\bar{xi}, \bar{yi}).$$

3. Na konci $yi = 0$, čiže $gcd(x, y) = gcd(xi, 0) = xi = gcd$.

Ak $x + y = 0$ tak $gcd = 0$ (ako sme sa dohodli). Cyklus ani raz nezbehne.
Ako definovať v CL-ku Gcd ?

$Gcd(x, 0) = x$
$Gcd(x, y + 1) = Gcd(y + 1, x \mod (y + 1))$.

Definícia je tail - rekurzívna. Všimnime si analogický výpočet (nepotrebujeme pomocnú premennú zi) pre $x = 12,\ y = 21$:

$$Gcd(12, 21) = Gcd(21, 12) = Gcd(12, 9) = Gcd(9, 3) = Gcd(3, 0) = 3.$$

Poznamenajme, že sme použili **ten istý** jazyk logiky na zápis špecifikácie (čo robiť) aj definície funkcie (ako to robiť). Z toho tiež vyplýva, že naše programy sú matematické.

2.1.3 Fibonacciho funkcia.

Uvažujme Fibonacciho postupnosť:

$$0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ \ldots$$

Z faktu, že nasledujúci člen postupnosti je súčtom predchádzajúcich dvoch, môžeme ihneď napísať rekurzívnu definíciu:

$Fib(0) = 0$
$Fib(1) = 1$
$Fib(n + 2) = Fib(n + 1) + Fib(n)$.

Skúsme počítať pre $Fib(5)$:

$$\begin{aligned} Fib(5) &= Fib(4) + Fib(3) \\ &= Fib(3) + Fib(2) + Fib(2) + Fib(1) \\ &= Fib(2) + Fib(1) + Fib(1) + Fib(0) + Fib(1) + Fib(0) + 1 \\ &= Fib(1) + Fib(0) + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 \\ &= 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Dostávame nešikovný dlhý výpočet. Približne 2^n (pre $Fib(5)$ 8 volaní) rekurzívnych volaní treba pre výpočet $Fib(n)$. Skúsme to teda šikovnejšie, stačí nám pamätať si v pomocných premenných (v akumulátoroch) hodnoty pre dva predchádzajúce prípady a z nich vypočítať nový člen postupnosti. Dostávame definíciu:

$Fiba(0, a, b) = a$
$Fib(n) = Fiba(n, 0, 1)$
$Fiba(n + 1, a, b) = Fiba(n, a + b, a)$.

Definícia je tail - rekurzívna. Na porovnanie si ukážeme tiež výpočet $Fib(5)$.

$$\begin{aligned} Fib(5) &= Fiba(5, 0, 1) = Fiba(4, 1, 0) \\ &= Fiba(3, 1, 1) = Fiba(2, 2, 1) \\ &= Fiba(1, 3, 2) = Fiba(0, 5, 3) = 5. \end{aligned}$$

Vidíme, že je omnoho kratší. Pre ilustráciu si skúsme túto tail - rekurzívnu definíciu naprogramovať (odsimulovať) pomocou **while**-cyklu (predpokladáme, že $n \geq 0$).

```
a := 0;
b := 1;
i := n;
while i > 0 do
   begin
     c := a+b;
     b := a;
     a := c;
     i := i-1;
   end
fib := a;
```

začiatok	po 1.zbehu	po 2.zbehu	3.zbehu	4.zbehu	5.zbehu
a = 1	1	2	3	3	5
b = 1	0	1	1	2	3
c = ?	1	1	2	3	5
i = 5	4	3	2	1	0

Obrázok 2.4: Výpočet pre $n = 5$.

1. Klesajúci parameter je i; testujeme, či $i > 0$; v cykle dekrementujeme $i := i - 1$; čiže cyklus vždy skončí.
2. Pre $n = 0$ platí $fib = Fib(0)$.
3. Pre $n > 0$ máme invariant

$$\begin{aligned} Fib(n-i) &= a \\ Fib(n-i-1) &= b \end{aligned}$$

(a) Na začiatku pre $i = n - 1$ dostávame

$$\begin{aligned} Fib(n-n+1) = Fib(1) = 1 &= a \\ Fib(n-n) = Fib(0) = 0 &= b. \end{aligned}$$

Po vykonaní cyklu máme:

$$\begin{aligned} Fib(n-\bar{i}) &= Fib(n-i+1) = Fib(n-i) + Fib(n-i-1) \\ &= a + b = \bar{a} \\ Fib(n-\bar{i}-1) &= Fib(n-i) = a = \bar{b}. \end{aligned}$$

(b) Na konci platí, že

$$\begin{aligned} Fib(n-0) &= Fib(n) = a = fib \\ Fib(n-1) &= b. \end{aligned}$$

Výpočet pre $n = 5$ najdeme v tabuľke 2.4.

Teraz si skúsime verziu Fibonacciho funkcie pomocou **for**-cyklu.

```
if n=0 then fib := 0
 else if n=1 then fib := 1
  else
   begin
     a := 1;
     b := 0;
     for i=2 to n do
       begin
         c := a+b;
         b := a;
         a := c;
       end
     fib := a
   end
```

Overme si korektnosť nášho programu. Pre

$$\begin{aligned} n &= 0 \qquad fib = 0 = Fib(0) \\ n &= 1 \qquad fib = 1 = Fib(1). \end{aligned}$$

Pre $n \geq 2$ cyklus zbehne $n - 2 + 1$-krát (klesajúci parameter je $n - i + 1$). Platí invariant

$$\begin{aligned} Fib(i-1) &= a \\ Fib(i-2) &= b. \end{aligned}$$

1. Na začiatku máme

$$\begin{aligned} Fib(2-1) = Fib(1) = 1 &= a \\ Fib(2-2) = Fib(0) = 0 &= b. \end{aligned}$$

2. Po zbehnutí cyklu dostávame:

$$\begin{aligned} Fib(\bar{i}-1) &= Fib(i) = Fib(i-1) + Fib(i-2) \\ &= a + b = \bar{a} \\ Fib(\bar{i}-2) &= Fib(i-1) = a = \bar{b}. \end{aligned}$$

3. Na konci $i = n + 1$ a platí, že

$$\begin{aligned} Fib(n+1-1) &= Fib(n) = a = fib \\ Fib(n+1-2) &= Fib(n-1) = b. \end{aligned}$$

Čiže náš program počíta Fibonacciho funkciu korektne.

začiatok	po 1.zbehu	po 2.zbehu	3.zbehu	4.zbehu
a = 1	1	2	3	5
b = 0	1	1	2	3
c = ?	1	2	3	5
i = 2	3	4	5	6

Obrázok 2.5: Výpočet pre $n = 5$.

V CL-ku môžeme simulovať tento výpočet nasledovne:

$Fib(0) = 0$
$Fib(1) = 1$
$Fib(n+2) = Fib2(2, n+2, 1, 0)$
$Fib2(i, n, a, b) = a \leftarrow i > n$
$Fib2(i, n, a, b) = Fib2(i+1, n, a+b, a) \leftarrow i \leq n$.

1. Definícia je tail - rekurzívna.
2. Netreba pomocnú premennú c.
3. Medzivýsledky sa ukladajú do akumulátorov $a = Fib(i-1)$, $b = Fib(i-2)$.

Pre porovnanie si ukážeme tiež výpočet pre $Fib(5)$:

$$\begin{aligned} Fib(5) &= Fib2(2,5,1,0) = Fib2(3,5,1,1) \\ &= Fib2(4,5,2,1) = Fib2(5,5,3,2) \\ &= Fib2(6,5,5,3) = 5. \end{aligned}$$

Kapitola 3

Číselné reprezentácie

V tejto kapitole si zrekapitulujeme naše znalosti o číselných sústavách, ktoré poznáme zo základnej a strednej školy, z informatického hľadiska. Načrtneme si implementáciu veľkej aritmetiky v rozličných číselných reprezentáciach. Ďalej sa zoznámime s p-adickými číselnými sústavami, kde našu pozornosť sústredíme na diadickú sústavu a jej reprezentáciu pomocou špecialnych termov - numerálov. Nakoniec si rozoberieme implementáciu diadickej sústavy v jazyku CL.

3.1 Unárna sústava

Unárna sústava je asi prvá číselná sústava, s ktorou ste sa zoznámili v detstve (počítanie na prstoch, guličky, čiarky). Prázdny reťazec čiarok (reprezentujúci

čísla	unárny zápis
0	$\emptyset$
1	|
2	||
3	|||
$\vdots$	$\vdots$

Obrázok 3.1: Unárna sústava.

0) v nej označíme ako $\emptyset$ (pozri Obrázok 3.1). Čo je jej plus? Je jednoduchá - ľahko sa pričíta a odčíta jednotka.

3.1.1 Pričítanie a odčítanie jednotky. Dostávame nasledovné jednoduché klauzálne definície:

$Successor(X) = X|$

$Predecessor(\emptyset) = \emptyset$ *(definitoricky)*
$Predeccessor(X|) = X$,

Môžeme ich zapísať i v tablovej verzii:

$$\frac{(+1)\ X}{X|} \qquad \frac{(-1)\ \emptyset}{\emptyset} \qquad \frac{(-1)\ X|}{X} .$$

Vzor (pattern) $X|$ naozaj matematicky znamená $X+1$. Nakoniec si ukážme, že aj definície sčítania a odčítania nie sú oveľa zložitejšie.

3.1.2 Sčítanie.

$Addition(\emptyset, Y) = Y$
$Addition(X|, Y) = Addition(X, Y|)$
alebo
$Addition(X|, Y) = Addition(X, Y)|$,

tablová verzia:

$$\begin{array}{r} \emptyset \\ +Y \\ \hline Y \end{array} \qquad \begin{array}{r} X| \\ +\ Y \\ \hline X+Y| \end{array} \qquad \begin{array}{r} X| \\ +\ Y \\ \hline (X+Y)| \end{array} .$$

3.1.3 Odčítanie.

$Subtraction(\emptyset, Y) = \emptyset$ *(definitoricky)*
$Subtraction(X|, \emptyset) = X|$
$Subtraction(X|, Y|) = Subtraction(X, Y)$,

tablová verzia:

$$\begin{array}{r} \emptyset \\ -Y \\ \hline \emptyset \end{array} \qquad \begin{array}{r} X| \\ -\ \emptyset \\ \hline X| \end{array} \qquad \begin{array}{r} X| \\ -Y| \\ \hline (X-Y) \end{array} .$$

Zápis čísel v unárnej sústave má však aj svoje nevýhody. Dlžka zápisu zodpovedá veľkosti čísla (napríklad na číslo 5 potrebujeme ||||| čiarok, znakov). Tiež rekurzia je typu $x+1 \to x$, počet rekurzívnych volaní zhruba odpovedá veľkosti čísla x. Preto sa používajú iné číselné sústavy, ktoré umožnujú 'ekonomickejší' (kratší zápis) a tiež rýchlejšiu rekurziu (menší počet rekurzívnych volaní, miera rýchlejšie klesá).

3.2 Decimálna sústava

Ďalšou číselnou sústavou, s ktorou ste sa zoznámili v škole, bola decimálna (desiatková) sústava. Používa 10 cifier (znakov) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Číslo c v nej vyjadríme ako polynóm 10-vých mocnín

$$c = k_n 10^n + k_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + k_0 10^0$$

a pozičine ho napíšeme ako $k_n, \ldots, k_0$. Zápis je výrazne kratší. Napríklad pre číslo tisíc - 1000 namiesto tisíc čiarok stačia 4 znaky, čo zhruba odpovedá $\log_{10} 10^3 = 3$; pre milión - 1000000 ($\log_{10} 10^6 = 6$) použijeme iba 7 znakov. Približne potrebujeme $\log_{10} c$ znakov na zápis čísla c, dokážeme ho teda zapísať v logaritmickej dĺžke. V prípade unárnej sústavy sme pre číslo c potrebovali až c znakov, zapisovali sme ho v lineárnej dĺžke, rozdiel dĺžok je veľmi veľký.

Ako je to s pričítaním a odčítaním jednotky? Dostávame nasledujúce jednoduché definície:

3.2.1 Pričítanie jednotky.

$Successor(\emptyset) = 1$
$Successor(X0) = X1$
$Successor(X1) = X2$
$\vdots$
$Successor(X9) = Successor(X)0$,

tablová verzia:

$$\frac{(+1)\ \emptyset}{1} \quad \frac{(+1)\ X0}{X1} \quad \cdots \quad \frac{(+1)\ X9}{((+1)\ X)0} .$$

3.2.2 Odčítanie jednotky.

$Predecessor(\emptyset) = \emptyset$ *(definitoricky)*
$Predecessor(X0) = Predecessor(X)9 \leftarrow X \neq \emptyset$
$Predecessor = 0 \leftarrow X = \emptyset$
$Predecessor(X1) = X0$
$\vdots$
$Predecessor(X9) = X8$,

tablová verzia:

$$\frac{(-1)\ \emptyset}{\emptyset} \quad \frac{(-1)\ X0\ (X \neq \emptyset)}{((-1)\ X)9} \quad \frac{(-1)\ X0\ (X = \emptyset)}{0} \quad \frac{(-1)\ X1}{X0} \quad \cdots \quad \frac{(-1)\ X9}{X8} .$$

Predchádzajúca definícia však v sebe skrýva problém, funguje, iba ak zápis neobsahuje vľavo neplatné nuly, ale sama túto zásadu nedodrží. Napríklad odčítaním jednotky od zápisu 10 čísla 10 dostaneme zápis 09, vygeneruje sa vľavo neplatná 0. Odčítaním jednotky od zápisu 00 čísla 0 získame dokonca chybný výsledok 09! Pri p-adických sústavách si ukážeme správne riešenie.

Pokúsme sa schématicky si zadefinovať sčítanie, odčítanie a násobenie.

3.2.3 Sčítanie.

$$\begin{array}{r} \emptyset \\ +Y \\ \hline Y \end{array} \qquad \begin{array}{r} X0 \\ +Y0 \\ \hline (X+Y)0 \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{r} X9 \\ +Y9 \\ \hline (X+Y+1)8 \end{array} .$$

Napríklad: $\begin{array}{r} 347 \\ +\,589 \\ \hline 936 \end{array}$.

3.2.4 Odčítanie.

$$\begin{array}{r} \emptyset \\ -\,Y \\ \hline \emptyset \end{array} \quad \begin{array}{r} X0 \\ -\,\emptyset \\ \hline X0 \end{array} \quad \begin{array}{r} X0 \\ -\,Y0 \\ \hline (X-Y)0 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{r} X0 \\ -\,Y9 \\ \hline (X-Y-1)1 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{r} X9 \\ -\,Y9 \\ \hline (X-Y)0 \end{array}.$$

Naríklad: $\begin{array}{r} 589 \\ -\,499 \\ \hline 90 \end{array}$.

Keby sme chceli presnejšie formalizovať, vznikli by problémy ako pri funkcii *Predecessor* kvôli nejednoznačnému zápisu (neplatné nuly vľavo).

3.2.5 Násobenie.

Celková schéma:

$$\begin{array}{r} X \\ \cdot\, Yk \\ \hline X \cdot k \\ +\, X \cdot Y \cdot 10 \end{array}.$$

Príklad: $\begin{array}{r} 45 \\ \cdot\, 93 \\ \hline 135 \\ +\,4050 \\ \hline 4185 \end{array}$.

Využívame násobenie X jednou cifrou:

$$\begin{array}{r} X k_1 \\ \cdot\, k_2 \\ \hline (X \cdot k_2 + prenos)(k_1 \cdot k_2) \end{array}.$$

V decimálnej sústave vidíme, že sa ľahko realizuje násobenie základom 10 (posuv doľava + pridanie 0 vpravo) a celočíselné delenie 10-mi (posuv doprava + odrezanie cifry napravo).

3.3 Binárna sústava

V počítačoch sa používa na kódovanie (reprezentáciu, zápis) čísel často binárna sústava (popri hexadecimálnej a oktálnej). Používame dve cifry 0, 1. Číslo c

číslo	binárna sústava
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
⋮	⋮

Obrázok 3.2: Binárna sústava.

vyjadríme ako polynóm 2-vých mocnín

$$c = k_n \cdot 2^n + k_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + k_0 \cdot 2^0$$

a pozičné zapíšeme ako $k_n \ldots k_0$ (pozri Obrázok 3.2). Dĺžka zápisu zodpovedá $\log_2 c$ (analogicky ako pri desiatkovej sústave i tu dosahujeme logaritmickú dĺžku zápisu). Napríklad: $(1024)_10 = (10000000000)_2$, dĺžka je 11 znakov, čo približne zodpovedá $\log_2 1024 = 10$.

Základné aritmetické operácie odvodíme analogicky ako pri desiatkovej sústave. Sú vlastne ich zjednodušením z desiatich cifier (prípadov) na iba dve cifry (prípady).

3.3.1 Successor.

$$\frac{(+1)\ \emptyset}{1} \quad \frac{(+1)\ X0}{X1} \quad \frac{(+1)\ X1}{((+1)\ X)0}.$$

3.3.2 Predecessor. Taktiež, ako pri desiatkovej sústave, funguje iba ak zápis neobsahuje vľavo neplatné nuly a pritom sám ich vyrába.

$$\frac{(-1)\ \emptyset}{\emptyset} \quad \frac{(-1)\ X0\ (X \neq \emptyset)}{((-1)\ X)1} \quad \frac{(-1)\ X0\ (X = \emptyset)}{0} \quad \frac{(-1)\ X1}{X0}.$$

3.3.3 Sčítanie.

$$\begin{array}{r} \emptyset \\ +\,Y \\ \hline Y \end{array} \quad \begin{array}{r} X0 \\ +\,Y0 \\ \hline (X+Y)0 \end{array} \quad \begin{array}{r} X0 \\ +\,Y1 \\ \hline (X+Y)1 \end{array} \quad \begin{array}{r} X1 \\ +\,Y0 \\ \hline (X+Y)1 \end{array} \quad \begin{array}{r} X1 \\ +\,Y1 \\ \hline (X+Y+1)0 \end{array}.$$

Príklad: $\begin{array}{r} 1011 \\ +\,1111 \\ \hline 11010 \end{array}$.

3.3.4 Odčítanie.

$$\frac{\begin{array}{r}\emptyset\\ Y\end{array}}{\emptyset}\quad \frac{\begin{array}{r}X0\\ \emptyset\end{array}}{X0}\quad \frac{\begin{array}{r}X0\\ -Y0\end{array}}{(X-Y)0}\quad \frac{\begin{array}{r}X0\\ -Y1\end{array}}{(X-Y-1)1}\quad \frac{\begin{array}{r}X1\\ \emptyset\end{array}}{X1}\quad \frac{\begin{array}{r}X1\\ -Y0\end{array}}{(X-Y)1}\quad \frac{\begin{array}{r}X1\\ -Y1\end{array}}{(X-Y)0}\,.$$

Príklad: $\frac{\begin{array}{r}1110\\ -1010\end{array}}{100}\,.$

Keby sme chceli presnejšie definovať odčítanie, znova by vznikli problémy kvôli nejednoznačnému zápisu (neplatné nuly vľavo).

3.3.5 Násobenie.

$$\frac{\begin{array}{r}X\\ \cdot Y0\end{array}}{X\cdot Y0}\qquad \begin{array}{r}X\\ \cdot Y1\\ \hline X\\ +X\cdot Y0\end{array}\,.$$

Príklad: $\begin{array}{r}10\\ \cdot 11\\ \hline 10\\ +100\\ \hline 110\end{array}\,.$

Podobne ako pri desiatkovej sústave, i tu sa ľahko realizuje (v konštantnom čase) násobenie 2-mi (posuv doľava + pridanie 0 vpravo) a celočíselne delenie 2-mi (posuv doprava + odrezanie cifry napravo).

3.4 P-adické číselné sústavy

Nejednoznačnosť zápisu v n-árnych sústavach je určité ich mínus. Vyplýva z toho, že umožnujeme ako koeficienty pri mocninách používať 0. Preto sa nám v zápise čísla môžu vľavo hromadiť neplatné nuly:

$$0 = 00_{10} = 000_2$$
$$1 = 01_{10} = 001_2$$
$$2 = 02_{10} = 002_{10} = 0010_2\,.$$

To nám môže spôsobovať problémy vytvoriť elegantné definície aritmetických funkcií.

Ako si pomôcť ? Jednoducho, zakážeme koeficienty 0. Nech p je priridzené číslo > 0. Ľubovoľné číslo $c \in \mathbb{N}$ je buď 0 alebo ak $c > 0$, tak sa dá zapísať ako polynóm p mocnín: $c = k_n \cdot p^n + \ldots + k_0 \cdot p^0$, kde $k_i \in \{1, \ldots, p\}$. Pozične ho zapíšeme ako $k_n, \ldots, k_0$. Takúto číselnú sústavu nazveme p-adickou. Dlžka

číslo	monadická
0	0
1	1
2	11
3	111
4	1111
⋮	⋮

Obrázok 3.3: Monodická sústava.

zápisu c je logaritmická, približne $\log_p c$. Ak $p = 1$, sústavu voláme *monadická* (pozri Obrázok 3.3). Odpovedá vlastne našej unárnej sústave. Len miesto čiarok | píšeme 1-ky. Nebudeme ju ďalej rozvádzať, nakoľko o nej platí presne to, čo sme si povedali o unárnej sústave.

3.5 Diadická sústava

číslo	diadická
0	0
1	1
2	2
3	11
4	12
5	21
6	22
7	111
8	112
9	121
10	122
11	211
12	212
13	221
14	222
15	1111
⋮	⋮

Obrázok 3.4: Diadická sústava.

V ďalšom výklade sa zameriame na prípad $p = 2$ - na *diadickú* sústavu (pozri

Obrázok 3.4). Z polynomiálneho zápisu ihneď vidíme, že platí:

$$\overline{X1} = 2X + 1,\ \overline{X2} = 2X + 2,$$

kde $\overline{X}$ je pozičný zápis čísla X.

S využitím hore uvedených rovností si skúsme zadefinovať niektoré aritmetické operácie:

3.5.1 Successor.

$$\frac{(+1)\ 0}{1} \quad \frac{(+1)\ X1}{X2} \quad \frac{(+1)\ X2}{((+1)\ X)1}.$$

3.5.2 Predecessor.

$$\frac{(-1)\ 0}{0} \quad \frac{(-1)\ 1}{0} \quad \frac{(-1)\ X11}{((-1)\ X1)2} \quad \frac{(-1)\ X21}{X12} \quad \frac{(-1)\ X2}{X1}$$

alebo

$$\frac{(-1)\ 0}{0} \quad \frac{(-1)\ X1(X = \emptyset)}{0} \quad \frac{(-1)\ X1(X \neq \emptyset)}{((-1)\ X)2} \quad \frac{(-1)\ X2}{X1}.$$

3.5.3 Sčítanie.

$$\frac{\begin{array}{r}0\\+Y\end{array}}{Y} \quad \frac{\begin{array}{r}X1\\+0\end{array}}{X1} \quad \frac{\begin{array}{r}X1\\+Y1\end{array}}{(X+Y)2} \quad \frac{\begin{array}{r}X1\\+Y2\end{array}}{(X+Y+1)1} \quad \frac{\begin{array}{r}X2\\+0\end{array}}{X2} \quad \frac{\begin{array}{r}X2\\+Y1\end{array}}{(X+Y+1)1} \quad \frac{\begin{array}{r}X2\\+Y2\end{array}}{(X+Y+1)2}.$$

3.5.4 Násobenie.

$$\frac{\begin{array}{r}0\\\cdot Y\end{array}}{0} \quad \frac{\begin{array}{r}X1\\\cdot Y\end{array}}{\begin{array}{r}Y\\+X\cdot Y\\+X\cdot Y\end{array}} \quad \frac{\begin{array}{r}X2\\\cdot Y\end{array}}{\begin{array}{r}Y\\+\quad Y\\+X\cdot Y\\+X\cdot Y\end{array}}.$$

3.5.5 Umocňovanie.

$$\frac{\begin{array}{r}0\\Y\end{array}}{1} \quad \frac{\begin{array}{r}X1\\Y\end{array}}{Y\cdot Y^X\cdot Y^X} \quad \frac{\begin{array}{r}X2\\Y\end{array}}{Y\cdot Y\cdot Y^X\cdot Y^X}.$$

3.6 Reprezentácia čísel pomocou numerálov

Vo funkcionálnom programovaní pracujeme s *výrazmi, termami.* Ako sme si už uviedli, výpočet je vyhodnocovanie výrazov, ich prepis, redukcia do základných, ďalej už nerozložiteľných, *ireducibilných* tvarov. Našim ďalším cieľom bude reprezentovať, implementovať, vyjadriť niektoré číseľné sústavy pomocou špecialných termov - *numerálov.*

Začnime s monadickou sústavou. Použijeme

- 0 - konštantu, definovanú ako $0 \in \mathbb{N}$ a
- S - unárny funkčný symbol (successor), definovaný ako $S(x) = x + 1$.

Budeme mať nasledovnú korešpondenciu uvedenú na Obrázku 3.5.

číslo	monadická sústava	numerál
0	0	0
1	1	$S(0)$
2	11	$SS(0)$
3	111	$SSS(0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\underbrace{111\ldots1}_{n}$	$\underbrace{SSS\ldots S}_{n}(0)$

Obrázok 3.5: Reprezentácia čísel v unárnej sústave pomocou numerálov.

Pri diadickej sústave použijeme

- 0 - konštantu, definovanú ako $0 \in \mathbb{N}$ a
- $S1,\ S2$ - unárne funkčné symboly, definované nasledovne:

$$S1(x) = 2 \cdot x + 1,$$
$$S2(x) = 2 \cdot x + 2.$$

V CL-ku sú funkčné symboly $S1$ a $S2$ už preddefinované. Aby sme sa čo najviac priblížili pozičnému diadickému zápisu, budú v systéme Cl výrazy $S1(x)$ a $S2(x)$ zobrazované v postfixovom formáte x_1 a x_2. Dostávame korešpondenciu uvedenú na Obrázku 3.6.

Všimnite si, že postupnosť 1, 2 a $S1,\ S2$ je zrkadlovo otočená. Vyplýva to z prefixovej notácie $S1(x)$ a $S2(x)$ a postfixovej notácie ich skratiek x_1 a x_2. Napríklad: $4 = S2S1(0) = S2(0_1) = 0_{12}$. V CL-ku na zobrazenie čísel v diadickej sústave budeme používať formát $N2$. Napríklad, pre $5 = x : N2$ sa zobrazí x ako 0_{21}. Prilepí nám to 0 pred diadický zápis, čo vyplýva z postfixovej notácie skratiek pre $S1,\ S2$.

Preberieme si ďalší typ diskriminácie a to diadickú diskrimináciu. Vyzerá nasledovne:

číslo	diadická sústava	numerál	V CL-ku
0	0	0	0
1	1	$S1(0)$	0_1
2	2	$S2(0)$	0_2
3	11	$S1S1(0)$	0_{11}
4	12	$S2S1(0)$	0_{12}
5	21	$S1S2(0)$	0_{21}
6	22	$S2S2(0)$	0_{22}
7	111	$S1S1S1(0)$	0_{111}
8	112	$S2S1S1(0)$	0_{112}

Obrázok 3.6: Reprezentácia diadickej sústavy pomocou numerálov.

$F(0) = v_1$
$F(S1(x)) = v_2$
$F(S2(x)) = v_3$,

po kompilácii sa zobrazí ako:

$F(0) = v_1$
$F(x_1) = v_2$
$F(x_2) = v_3$.

Môžeme mať aj vnorenú diskrimináciu. Napríklad:

$F(0) = v_1$
$F(S1(0)) = v_2$
$F(S1(S1(x))) = v_3$
$F(S1(S2(x))) = v_4$
$F(S2(0)) = v_5$
$F(S2(S1(x)) = v_6$
$F(S2(S2(x)) = v_7$,

po kompilácii sa zobrazí ako

$F(0) = v_1$
$F(0_1) = v_2$
$F(x_{11}) = v_3$
$F(x_{21}) = v_4$
$F(0_2) = v_5$
$F(x_{12}) = v_6$
$F(x_{22}) = v_7$.

Dá sa používať diadická diskriminácia i v nasledovnom tvare:

$F(0) = v_1$
$F(2 \cdot x + 1) = v_2$
$F(2 \cdot x + 2) = v_3$.

Skúsme si teraz niektoré aritmetické funkcie nad diadickou sústavou klauzálne definovať:

3.6.1 Successor.

$S(0) = 1$
$S(S(x_1)) = x_2$
$S(S(x_2)) = S(x)1$

alebo

$S(0) = 1$
$S(2 \cdot x + 1) = 2 \cdot x + 2$
$S(2 \cdot x + 2) = 2 \cdot S(x) + 1$.

3.6.2 Predecessor.

Príklad na vnorenú diskrimináciu:

$Pred(0) = 0$
$Pred(0_1) = 0$
$Pred(x_{11}) = Pred(x_1)_2$
$Pred(x_{21}) = x_1$
$Pred(x_2) = x_1$.

Verzia bez vnorenej diskriminácie:

$Pred(0) = 0$
$Pred(x_1) = 0 \leftarrow x = 0$
$Pred(x_1) = Pred(x)_2 \leftarrow x \neq 0$
$Pred(x_2) = x_1$.

3.6.3 Sčítanie.

$Add(0, y) = y$
$Add(x_1, 0) = x_1$
$Add(x_1, y_1) = Add(x, y)_2$
$Add(x_1, y_2) = S(Add(x, y))_1$
$Add(x_2, 0) = x_2$
$Add(x_2, y_1) = S(Add(x, y))_1$
$Add(x_2, y_2) = S(Add(x, y))_2$.

3.6.4 Násobenie.

$Mul(0, y) = 0$
$Mul(x_1, y) = y + z + z \leftarrow Mul(x, y) = z$
$Mul(x_1, y) = y + y + z + z \leftarrow Mul(x, y) = z$.

3.6.5 Umocňovanie.

$Exp(x, 0) = 1$
$Exp(x, y_1) = x \cdot z \cdot z \cdot z \leftarrow Exp(x, y) = z$
$Exp(x, y_1) = x \cdot x \cdot z \cdot z \cdot z \leftarrow Exp(x, y) = z$

Kapitola 4

Kódovanie dátových štruktúr do $\mathbb{N}$

Pri programovaní sa používa veľké množstvo rôznych dátových štruktúr: n-tice, vektory, matice, viacdimenzionálne polia, reťazce, zoznamy, záznamy, zásobníky, fronty, tabuľky, stromy, lesy, grafy atď.. Otázka znie, ako tieto štruktúry implementovať do jazyka, ktorý umožnuje definovať funkcie iba nad prirodzenými číslami. Presnejšie ako zakódovať tieto štruktúry do $\mathbb{N}$. V nasledujúcom výklade si odpovieme na túto otázku.

4.1 Kódovanie konečných postupností nad konečnou abecedou

Ako prvý krok k našmu cieľu, sa zamyslíme nad kódovaním konečných postupností znakov (zoznamov, reťazcov) nad konečnou abecedou - množinou znakov. Doteraz sme využívali diadickú (p-adickú) číselnú sústavu na 'budovanie' veľkej aritmetiky. Definovali sme si niektoré základné aritmetické funkcie, ktoré sú schopné pracovať s ľubovoľne veľkým číslom bez obmedzenia. Naším jediným reálnym obmedzením je veľkosť pamäte v počítači. Ďalej si ukážeme, ako pomocou p-adickej sústavy môžeme kódovať postupnosti - zoznamy, reťazce znakov nad nejakou konečnou abecedou s počtom znakov p. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že abeceda $\sum = \{1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots, p\}$. (Naša abeceda sa skladá iba zo znakov - cifier.) Ľubovoľný reťazec znakov z tejto abecedy budeme kódovať číslom, ktorého pozičný zápis v p-adickej sústave zodpovedá danému reťazcu. Napríklad pre $p = 8$, reťazec 23871 budeme kódovať číslom, ktorého zápis v 8-adickej sústave je 0_{23871}. Prázdny reťazec kódujeme 0-ou.

Teraz si zadefinujme jednoduché operácie s reťazcami. Pre jednoduchosť ostaneme v diadickej sústave, budeme teda uvažovať iba reťazce zložené z 1-tiek a 2-ok.

4.1.1 Konkatenácia dvoch reťazcov.

$Con(X,0) = X$
$Con(X,Y_1) = Con(X,Y)_1$
$Con(X,Y_2) = Con(X,Y)_2$.

Výpočet:

$$Con(0_{12}, 0_{22}) = Con(0_{12}, 0_2)_2 = Con(0_{12}, 0)_{22} = 0_{1222}.$$

4.1.2 Reverz (otočenie reťazca).
Rekurzívna verzia:

$Rev(0) = 0$
$Rev(X_1) = Con(0_1, Rev(X))$
$Rev(X_2) = Con(0_2, Rev(X))$.

Príklad:

$$\begin{aligned} Rev(0_{12}) &= Con(0_2, Rev(0_1)) == Con(0_2, Con(0_1, Rev(0))) \\ &= Con(0_2, Con(0_1, 0)) = Con(0_2, 0_1) \\ &= Con(0_2, 0)_1 = 0_{21}. \end{aligned}$$

Iteratívna (šikovnejšia verzia):

$Rev(X) = Revi(X,0)$
$Revi(0,a) = a$
$Revi(X_1,a) = Revi(X,a_1)$
$Revi(X_2,a) = Revi(X,a_2)$.

Príklad:

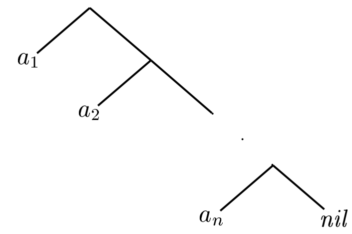
$$\begin{aligned} Rev(0_{12}) &= Revi(0_{12}, 0) = Revi(0_1, 0_2) \\ &= Revi(0, 0_{21}) = 0_{21}. \end{aligned}$$

Analogickým spôsobom by sa dali zadefinovať i ďalšie elegantné operácie nad diadickými reťazcami.

4.2 Teraz o kódovaní niečo všeobecnejšie

Naším ďalším cieľom bude navrhnúť kódovanie zoznamov (konečných postupností) nad nekonečnou abecedou, napríklad ℕ. Pozrime sa trošku do histórie funkcionálneho programovania. V jazyku LISP (SCHEME) sa dajú rôzne dátové štruktúry implementovať (kódovať) pomocou s-výrazov. S-výraz je buď

- atóm
  - numerický: 1, 2, 100,
  - symbolický: jano1, auto (reťazec písmen a číslic začínajúci písmenom),



Obrázok 4.1: S-výraz kódujúci zoznam $(a_1,\ a_2, \ldots, a_n)$.

  - (špeciálny) preddefinovaný nil;
- $cons(s_1, s_2)$ - zložený s-výraz (*pár*), kde s_1, s_2 sú nejaké s-výrazy. Budeme značiť aj ako $\underset{s_1\ \ s_2}{\wedge}$. (V LISP-e sa používa zápis $s_1 . s_2$.)

Ako by sme mohli implementovať pomocou s-výrazov zoznamy - konečné postupnosti nejakých prvkov ? Zoznam, označený ako

$$l = (a_1,\ a_2, \ldots, a_n),\ n \geq 0,$$

budeme kódovať s-výrazom načrtnutým na obrázku 4.1. Prázdny zoznam, ($n = 0$), označíme pomocou atomu nil. Čiže zakódovaný zoznam je

- buď tvaru nil - prázdny zoznam
- alebo tvaru $\underset{a_1\ \ l_1}{\wedge}$ - neprázdny zoznam, kde a_1 je jeho prvý prvok a l_1 je podzoznam - zvyšok zoznamu.

4.3 Jednoduché funkcie nad zoznamami

Ako budú vyzerať jednoduché funkcie nad zoznamami ?

4.3.1 Prvý prvok zoznamu.

$H(nil) = nil$ *(definitoricky)*

$H(\underset{a_1\ \ l_1}{\wedge}) = a_1$.

V LISP-e sa označuje ako *car*.

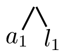
4.3.2 Zvyšok zoznamu.

$T(nil) = nil$ *(definitoricky)*

$T(\underset{a_1\ \ l_1}{\wedge}) = l_1$.

V LISP-e sa označuje ako *cdr*.

4.3.3 Pridanie prvku na začiatok zoznamu.

$C(a_1, l_1) =$ 

.

V LISP-e sa označuje ako *cons*.

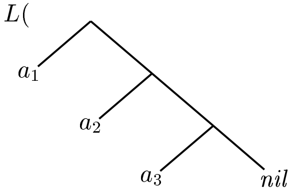
4.3.4 Dĺžka zoznamu.

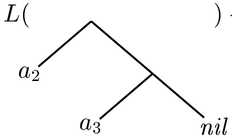
$L(nil) = 0$

$L($ 

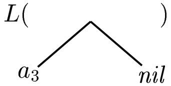
$) = L(l) + 1$.

Výpočet:

$L($ 

$) = L($ 

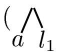
$) + 1 =$

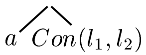
$= L($ 

$) + 1 + 1 = L(nil) + 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 + 1 = 3.$

4.3.5 Konkatenácia dvoch zoznamov.

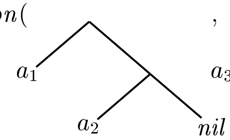
$Con(nil, l_2) = l_2$

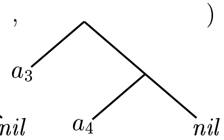
$Con($ 

$, l_2) =$ 

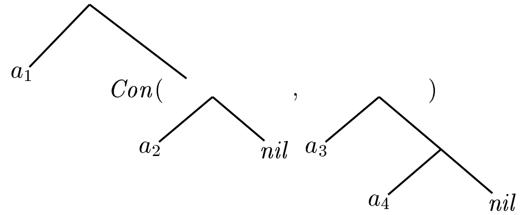
.

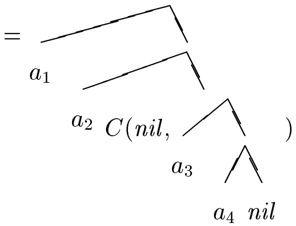
Výpočet:

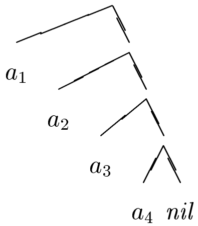
$Con($ 

, 

$) =$

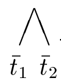
$=$ 

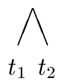
$=$ 

$=$ 

4.4 Kódovanie dátových štruktúr

4.4.1 Párovacie funkcie. Je zrejmé, že pomocou s- výrazov sa budú dať priamočiaro reprezentovať binárne stromy:

1. *nil*- prázdny strom,
2. 

- neprázdny binárny strom 

, kde $\bar{t}_i$ je reprezentácia t_i.

O tom ako kódovať ľubovolné stromy si povieme neskôr.

Poďme teraz spraviť ďalší krok k nášmu cieľu- implementácii, kódovania dátových štruktúr do ℕ: Budeme sa snažiť stotožniť množinu (*doménu*) s- výrazov s prirodzenými číslami. Môžeme si dovoliť nasledovné matematické zjednodušenie (abstrakcia) lispovských s-výrazov:

- miesto množiny rôznych atómov sa budeme snažiť vystačiť iba s jedným a to s 0 - ou,
- konštruktor- párovač *cons* budeme implemetovať pomocou vhodnej binárnej párovacej funkcie P nad ℕ, ktorá by mala splňať tieto vlastnosti:

1. $P(x,y) = P(v,w) \to x = v \wedge y = W$

2. $x < P(x,y) \wedge y < P(x,y)$

3. $x = 0 \vee \exists v \exists w x = P(v,w)$

1. vlastnosť nám zaručuje injektívnosť funkcie P, dvom rôznym "párom" x,y a v,w nemôžeme priradiť to isté číslo $P(x,y) = P(v,w)$;

2. vlastnosť sa jednak využije pri korektnosti párovej indukcii, ktorá slúži na dokazovanie správnosti programov- čo sa budete učiť 2. ročníku, a taktiež z nej vyplýva: $\forall x,y : 0 \le x < P(x,y)$, čiže $\forall x,y : 0 \neq P(x,y)$; nula nie je v obore hodnôt funkcie $P(range(P))$, čiže: $range(P) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

3. vlastnosť tvorí, že $range(P) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Pomocou 0 a binárneho funkcčného symbolu P môžeme vytvárať nasledovné P-výrazy (*párové výrazy*). Zjednodušenie lispovských s-výrazov:

0; *jediný atóm*
$P(0,0); P(P(0,0),0); P(P(0,0),P(0,0))$ *atď…* P*- výrazy*

Keď máme zložené P "fixované" nijakou vhodnou funkciu spĺňajúcou vlastnosti *1-3.*, môžeme každému prirodzenému číslu n jednoznačne priradiť P- výraz (jeho párový zápis), ktorého hodnota bude práve n. Čiže prirodzené čísla budeme vedieť reprezentovať pomocou P- výrazov. Takúto reprezentáciu budeme volať párová reprezentácia priridzených čísel a P-výrazy budeme nazývať P-*numeralmi*, kedže reprezentujú prirodzené čísla. Pod párovou veľkosťou čísla n budeme rozumieť počet P-čok v jeho párovom zápise, označíme ju ako $|n|$.

4.4.2 Cantorova párovacia funkcia. Skúsme teraz pohľadať vhoných kandidátov na funkciu P spĺnajúcich podmienky *1.*,*2.* a *3.*. Z matematickej analýzy poznáte Cantorovu funkciu, ktorá bijektívne zobrazuje $\mathbb{N}^2$ na $\mathbb{N}$. Znázornime si ju pomocou tabuľky 4.2. Môžeme si ju zmodifikovať nasledovne: šiftneme o

$C(x,y)$	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	0	1	3	6	10	$\cdots$
1	2	4	7	11	16	$\cdots$
2	5	8	12	17	23	$\cdots$
3	9	13	18	24	31	$\cdots$
4	14	19	25	32	40	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Obrázok 4.2: Cantorova párovacia funkcia

$J(x,y)$	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Obrázok 4.3: Modifikovaná Cantorova párovacia funkcia

jedna (pozri tabuľku 4.3) a dostaneme funkciu- bijekciu z $\mathbb{N}^2$ na $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Explicitný vzorec:

$$J(x,y) = \frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2} + (x+1)\ .$$

Napríklad: $J(1,2) = \frac{3\cdot4}{2} + 2 = 8$. Označme ju J. Funkcia J splňa podmienky *1-3.*. Môžeme teda pomocou J- numerálov reprezentovať čísla. Funkcia J má

čísla	J- numerál
0	0
1	$J(0,0)$
2	$J(0,1) = J(0,J(0,0))$
3	$J(1,0) = J(J(0,0),0)$
4	$J(0,2) = J(0,J(0,J(0,0)))$
5	$J(1,1) = J(J(0,0),J(0,0))$
6	$J(2,0) = J(J(0,J(0,0)),0)$
7	$J(0,3) = J(0,J(J(0,0),0)$
8	$J(1,2) = J(J(0,0),J(0,J(0,0)))$
9	$J(2,1) = J(J(0,J(0,0)),J(0,0))$
10	$J(3,0) = J(J(J(0,0),0),0)$

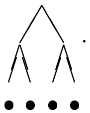
Obrázok 4.4: J-numerály

však určité nevýhody:

- čísla s rovnakou párovou veľkosťou nie sú spolu. Napríklad: čísla $7,8,9,10$ (pozri v tabuľke 4.3)
- dá sa ukázať, že zápis pomocou J- numerálov nie je "veľmi úsporný", obsahuje príliš veľa J-čok v párovom zápise nejakého čísla n.

4.4.3 Kódovanie pomocou binárnych stromov. Skúsme sa pozrieť po vhodnejšom kandidátovi, ktorý by nemal spomenuté nevýhody. Chceme, aby čísla s rovnakou párovacou veľkosťou boli držané spolu. Všeobecne, na párový numeral pre nejaké číslo n sa môžeme pozrieť ako na binárny strom:

- 0- je reprezentované ako prázdny strom, označíme ho ako • (bodka),
- $P(x, y)$- zobrazíme ako $\underset{\bar{x}\ \bar{y}}{\bigwedge}$, kde $\bar{x}, \bar{y}$ sú binárne stromy pre numerály x, y.

Napríklad: $P(P(0,0), P(0,0))$ zobrazíme ako  .

Poznamenajme, že párová velkosť zápisu, počet P-čok v párovom zápise, je rovná počtu vnútorných vrcholov v jeho stromovom zobrazení. Ľahko sa dá o tom presvedčiť z definície stromového zobrazenia párového numerálu.

binárne stromy s počtom vnútorných vrcholov 0.	binárne stromy s počtom vnútorných vrcholov 1.	atď ...

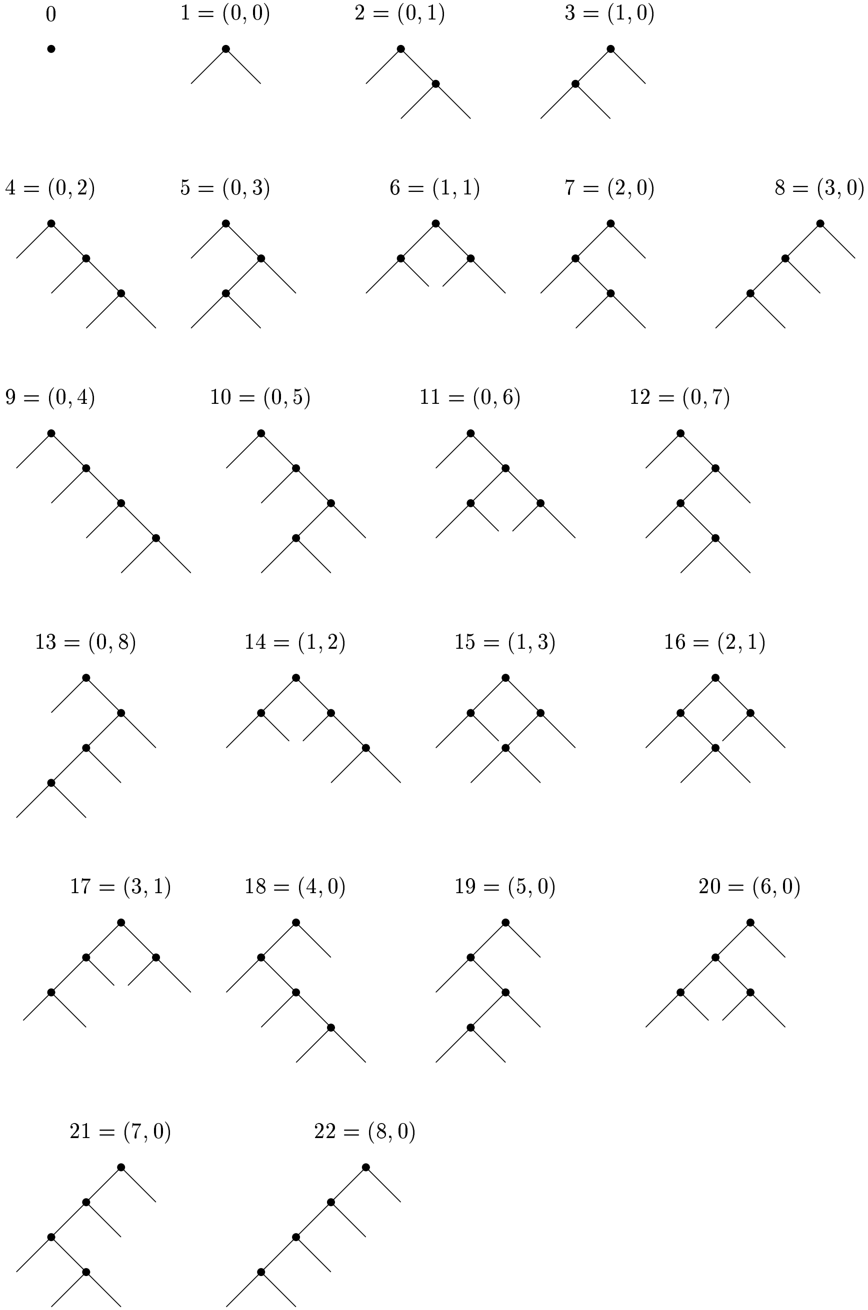
Obrázok 4.5: Binárne stromy

Vhodného kandidáta na párovaciu funkciu P dostaneme nasledovne: Budeme enumerovať všetky binárne stromy (stromové zobrazenia párových numerálov) - vytvárať nekonečnú postupnosť binárnych stromov:$b_0, b_1, b_2, \ldots$, (čiže 0 priradíme binárny strom b_0 (a tým odpovedajúci párový numeral), 1 zase b_1 atď ...) takým spôsobom, že binárne stromy s počtom vnútorných 0 (len prázdny strom), potom s počtom vnútorných vrcholov 1, 2, 3 atď.. Tým dosiahneme, že čísla rovnakou párovou veľkosťou budú držané spolu a stromy s menším počtom vnútorných vrcholov budú predchádzať stromy s väčším počtom vnútorných vrcholov. Našu postupnosť bude znázorňuje Obrázok 4.5.

Ako teraz vymenovať v jednom bloku všetky binárne stromy s rovnakým počtom vnútorných vrcholov ? Zoradíme ich lexikograficky: nech t_1, t_2 sú binárne stromy s rovnakým počtom vnútorných vrcholov, potom t_1 je pred t_2 ak ľavý podstrom t_1 je pred ľavým podstromom t_2 alebo ak ľavé podstromy sú rovnaké (zhodné, identické) tak pravý podstrom t_1 musí byť pred pravým podstromom t_2. Tohoto kandidáta (na párovaciu funkciu) budeme označovať čiarkou "," a používať *infixovú notáciu*. Napríklad: $(x, y); (0, (0, 0))$. Obrázok 4.6 znázorňuje začiatok tejto postupnosti.

Ako vidíme z konštrukcie, táto postupnosť nám jednoznačne fixuje párovaciu funkciu (x, y). Pre dve čísla x, y vezmeme x-ty a y-ty binárny strom (počítajúc od 0) t_1, t_2. Potom pozícia binárneho stromu $\underset{t_1\ t_2}{\bigwedge}$ bude určovať hodnotu (x, y).

Dá sa ukázať, že takto definovaná funkcia "," spĺňa vlastnosti *1-3.* a naviac pre párovú veľkosť čísla n platí, že $|n|$ je približne $\log n$, čiže dostávame zápis s



Obrázok 4.6: Enumerácia binárnych stromov

logaritmickou dlžkou, ktorý považujeme už za ekonimický (ako pri n-árnych a p-adických sústavach pre $n, p > 1$). Podarilo sa nám eliminovať obidve nevýhody funkcie J. Funkcia "," naviac spĺňa nasledujúce vlastnosti:

4. $x < y \to |X| \leq |y|$
5. $|x| < |y| \to x < y$
6. $|(x_1, x_2)| = |(y_1, y_2)| \to ((x_1, x_2) < (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 < y_1 \vee x_1 = y_1 \wedge x_2 < y_2)$
7. monotónnosť:

$$x_1 < x_2 \to (x_1, y) < (x_2, y)$$
$$y_1 < y_2 \to (x, y_1) < (x, y_2) \ .$$

4.4.4 Kontrakcia do unárnych funkcií. Teraz si ukážeme prirodzenú korešpondenciu medzi unárnymi a n-árnymi funkciami nad N. Najskôr malá poznámka k značeniu, zápisu ","-numerálov, aby sme nemuseli zbytočne písať veľa zátvoriek ","- numerálov tvaru
$(x_1, (x_2, \ldots, (x_{n-1}, x_n) \ldots))$ budeme skracovať do tvaru: $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Nech f je najaká n-árna funkcia nad $\mathbb{N}$, pokúsime sa ju "iplementovať" pomocou unárnej funkcie-*kontrakcie* pre f, označnej ako $< f >$, a párovacej funkcie ",". Uvažujme nasledovnú definíciu:

$$< f > (x) = \begin{cases} f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots x_n}_{\text{oddelovače}}) & \text{if } x = \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{párovače}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} .$$

Z nej dostávame, že

$$f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\substack{\text{čiarky sú syntaktické} \\ \text{oddelovače argumentov}}}) =< f > (\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\substack{\text{čiarky sú identifikátory pre} \\ \text{našu párovaciu funkciu ","}}})$$

Čiže bez ujmy na všeobecnosti sa môžeme zaobísť bez n-árnych funckií a vystačiť iba s unárnymi a párovaciu binárnou funkciou ",". Poznámka: pre unárnu funkciu f je $< f >= f$.
Príklady:
$max(x, y)$

$$< max > (z) = \begin{cases} max(x, y) & \text{if } z = x, y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$x + y$

$$< + > (z) = \begin{cases} x + y & \text{if } z = x, y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

4.4.5 Ako je to v CL ?. CL umožnuje definovať ľubovoľne n-árne funkcie. Napríklad: binárnu funkciu Max zadefinujeme:

fun/2 Max
$Max(x, y) = x \leftarrow x > y$
$Max(x, y) = y \leftarrow x \leq y$.

Doteraz ste implicitne, nevedomky miesto n-árnych funkcií definovali ich kontrakcie. Miesto *fun/1* môžeme písať *fun*. Ako zistiť kedy "," je párovacia funkcia a kedy oddelovač argumentov ? Na zistenie jednoznačnosti zaveďme nasledovnú konvenciu. Nech f je n-árna funkcia a $m \geq n$ potom chápeme

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots, x_m)$$

ako

$$f(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1},}_{\text{oddelovače}} \underbrace{(x_n, \ldots, x_m)}_{\text{párovače}})$$

Čiže:

- x_1 je 1. argument
- x_{n-1} je $n - 1$. argument
- $x_n, \ldots, x_m$ je n. argument .

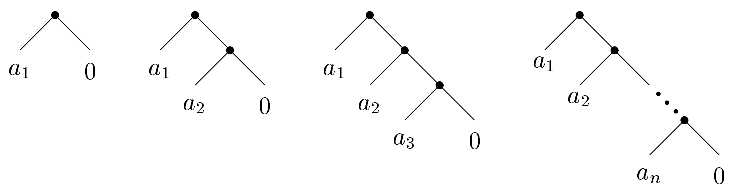
Ak by $m < n$, tak ide o zlý zápis aplikácie f. Pri unárnej funkcii všetky "," sú párovacie funkcie.

Kapitola 5

Zoznamy

5.1 Kódovanie konečnej postupnosti

Na minulej prednáške sme si stručne načrtli implementáciu zoznamov v LISPE pomocou s- výrazov. Teraz zoznamy budeme implementovať pomocou ","-výrazov.



$a_1, 0$ $\quad$ $a_1, a_2, 0$ $\quad$ $a_1, a_2, a_3, 0$ $\quad$ $a_1, a_2, \ldots, a_n, 0$

Obrázok 5.1: Zoznamy

Zoznam je konečná postupnosť prvkov $(a_1, \ldots, a_n)$.

1. Ak $n = 0$ (prázdny zoznam), tak ho reprezentujeme ako 0.
2. Ak $n > 0$, tak ho reprezentujeme ako na Obrázke 5.1.

Podľa dohody $(a_1, (a_2, \ldots, (a_n, 0) \ldots))$ skracujeme na $a_1, \ldots, a_n, 0$.

Dôležitá poznámka: p-adické sústavy nám umožnili kódovanie konečných postupností nad konečnou abecedou $\{1, \ldots, p\}$. Párová reprezentácia nám umožňuje omnoho všeobecnejšie kódovanie konečných postupností nad nekonečnou abecedou $\mathbb{N}$, a_i môže byť ľubovoľné prírodzené číslo. Čiže sú možné dva prípady zoznamov:

1. prázdny zoznam: 0

2. neprázdny zoznam: x, y; kde x je prvý prvok a y je podzoznam-zvyšok zonamu.

Všeobecne v párovej reprezentácii číslo n je tvaru 0 ak $n = 0$ alebo je tvaru x, y; kde x, y sú nejaké ","-numerály ak $n > 0$. Z toho dostávame v CL-ku párovú diskrimináciu:

v hlave
$F(0) = v_1 \ldots$
$F(x, y) = v_2 \ldots$
v tele
$F(z) = v_1 \leftarrow z = 0$
$F(z) = v_2 \leftarrow z = x, y$.

Môžeme mať i vnorené podprípady. Napríklad:

v vhlave
$F(0) = v_1 \ldots$
$F(x, 0) = v_2 \ldots$
$F(x, y, z) = v_3 \ldots$
zmiešaná
$F(0) = v_1$
$F(x, p) = v_2 \leftarrow p = 0$
$F(x, p) = v_3 \leftarrow p = y, z$
v tele
$F(r) = v_1 \leftarrow r = 0$
$F(r) = v_2 \leftarrow r = x, p \wedge p = 0$
$F(r) = v_3 \leftarrow r = x, p \wedge p = y, z$
alebo
$F(r) = v_1 \leftarrow r = 0$
$F(r) = v_2 \leftarrow r = x, 0$
$F(r) = v_3 \leftarrow r = x, y, z$.

5.2 Základné operácie nad zoznamami

Precvičíme si ju na nasledujúcich príkladoch.

5.2.1 Prvý prvok.

$H(0) = 0$ *dohoda*
$H(x, y) = x$

5.2.2 Zvyšok zoznamu.

$T(0) = 0$ *dohoda*
$T(x, y) = y$

5.2.3 Dĺžka zoznamu.

$L(0) = 0$
$L(x, y) = L(y) + 1$

Výpočet :

$$\begin{aligned} L(0,0,0,0) &= L(0,0,0) + 1 = L(0,0) + 1 + 1 \\ &= L(0) + 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 + 1 = 3 \ . \end{aligned}$$

5.2.4 Konkatenácia dvoch zoznamov.

$0 \oplus y = y$
$(x_1, x_2) \oplus = x_1, (x_2 \oplus y) = x_1, x_2 \oplus y$

Výpočet:

$$\begin{aligned} (1,2,3,0) \oplus (4,5,0) &= 1,(2,3,0) \oplus (4,5,0) == 1,2,(3,0) \oplus (4,5,0) = \\ &= 1,2,3,0 \oplus (4,5,0) = 1,2,3,4,5,0 \ . \end{aligned}$$

5.2.5 Reverz.

$Rev(0) = 0$
$Rev(x, y) = Rev(y) \oplus (x, 0)$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Rev(1,2,3,0) &= Rev(2,3,0) \oplus (1,0) = (Rev(3,0) \oplus (2,0)) \oplus (1,0) \\ &= ((Rev(0) \oplus (3,0)) \oplus (2,0)) \oplus (1,0) \\ &= ((0 \oplus (3,0)) \oplus (2,0)) \oplus (1,0) \\ &= ((3,0) \oplus (2,0)) \oplus (1,0) = (3,0 \oplus (2,0)) \oplus (1,0) \\ &= (3,2,0) \oplus (1,0) = 3,(2,0) \oplus (1,0) \\ &= 3,2,0 \oplus (1,0) = 3,2,1,0 \ . \end{aligned}$$

Iteratívny:

$Rev(x) = Revi(x, 0)$
$Revi(0, a) = a$
$Revi((x, y), a) = Revi(y, x, a) \ .$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Revi(1,2,3,0) &= Revi((1,2,3,0),0) == Revi((2,3,0),1,0) \\ &= Revi((3,0),2,1,0) = Revi(0,3,2,1,0) \\ &= Revi(3,2,1,0) \ . \end{aligned}$$

5.2.6 *i*-ty prvok zoznamu. Počítame od nuly.

$Take(0, i) = 0$ *dohoda*
$Take((x, y), 0) = x$
$Take((x, y), i + 1) = Take(y, i)$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Take((1,2,3,4,0),2) &= Take((2,3,4,0),1) \\ &= Take((3,4,0),0) = 3 \ . \end{aligned}$$

$Take(0, 0) = 0$ *dohoda*
$Take(0, x, y) = x$
$Take(i + 1, 0) = 0$ *dohoda*
$Take(i + 1, x + y) = Take(i, y) \ .$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Take(2,1,2,3,4,0) &= Take(1,2,3,4,0) \\ &= Take(0,3,4,0) = 3 \ . \end{aligned}$$

5.2.7 Vymaže prvých *i* prvkov.

$Drop(z, 0) = z$
$Drop(z, i + 1) = 0 \leftarrow z = 0$
$Drop(z, i + 1) = Drop(y, i) \leftarrow z = x, y$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Drop((1,2,3,0),2) &= Drop((2,3,0),1) \\ &= Drop((3,0),0) = 3,0 \ . \end{aligned}$$

Ak vymeníme argumenty

$Drop(0, z) = z$
$Drop(i + 1, 0) = 0$
$Drop(i + 1, x, y) = Drop(i, y)$

Výpočet:

$$\begin{aligned} Drop(2,1,2,3,0) &= Drop(1,2,3,0) \\ &= Drop(0,3,0) = 3,0 \ . \end{aligned}$$

5.2.8 Párová veľkosť.

$|0| = 0$
$|x, y| = |x| + |y| + 1$

Výpočet:

$$\begin{aligned} |(0,0),(0,0)| &= |0,0| + |0,0| + 1 \\ &= |0||0| + 1 + |0| + |0| + 1 + 1 \\ &= 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 = 3 \ . \end{aligned}$$

Kapitola 6

Predikáty

6.1 Definícia

Na prvej prednáške sme si charakterizovali jazyk logiky. Povedali sme si, že obsahuje symboli pre

- premenné : $x, y, z, \ldots$
- logické spojky: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow$
- kvantifikátory: $\forall, \exists$
- pomocné symboly: $(,)$

Tieto symboli súhrne nazveme logickými.

6.1.1 Funkčné symboly. Ďalej, že obsahuje funkčné symboly s *aritou* ≥ 0. (0-árne funkčné symboly chápeme ako symboly pre konštanty) a predikátové symboly s aritou ≥ 1. Tieto symboly súhrne nazveme špeciálnymi. Ak máme nijakú množinu (prvkov), doménu D môžeme funkčné symboly interpretovať, dať im zmysel, význam pomocou funkcií nad D: n-árnemu funkčnému symbolu, napr. f, priradíme n-árnu funkciu, značme ju f^I,$f^I : D^n \mapsto D$. V našom výklade sme za zamerali na $D = \mathbb{N}$ a pre funkcie nad N sme hľadali matematicky korektné definície, pomocou ktorých sme dokázali počítať, vyhodnocovať definované funkcie pre vstupné argumenty.

6.1.2 Predikátové symboly. Analogická situácia bude i pri predikátových symboloch. Vy ste sa už stretli s mnohými najmä binárnymi reláciami (predikátmi). Napr. na $N :<, \geq, =, |$. Pomocou binárneho predikátového symbolu $=$ ste označovali množinu-binárnu reláciu, predikát

$$\{(x, x) | x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2\}$$

pomocou binárneho predikátového symbolu $<$ ste označovali množinu-binárnu reláciu, predikát

$$\begin{array}{l}\{(0,1),(0,2),\ldots,(0,n)\ldots \\ (1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\ldots \\ (2,3),(2,4),\ldots \\ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\} \subseteq \mathbb{N}^2 .\end{array}$$

Nad D je nejaká *doména*- množina prvkov, predikátové symboly budeme interpretovať, dávať im význam, pomocou predikátov, relácií nad D: n-árnemu predikátovemu symbolu napr. P priradíme n-árny predikát(reláciu), označme ju P^I, $P^I \subseteq D^n$. Opäť v našom výklade sa zameriavame na $D = N$ a pre predikáty, relácie nad N budeme hľadať korektné definície a v CL-ku programovať klauzálne definície, pomocou ktorých budeme schopné zistiť, vyhodnotiť či nijaké vstupné argumenty sú v definovanej relácii, predikáte.

6.2 Príklady

Teraz si spravýme niekoľko jednoduchých príkladov.

6.2.1 Even. Matematická definícia:

$$Even(x) \leftrightarrow \exists y(2.y = x) .$$

Ako v CL-ku ? Napríklad pomocou mod môžeme spraviť explicitnú definíciu:

pred Even
$Even \leftarrow x \mod 2 = 0$.

Ak napríklad v okienku `Query` zadáme $Even(8)$, tak v okienku `Results` dostaneme `true` (naozaj 8 je párne). Pre *Even* dostaneme `false` (7 nie je párne). Keby sme nechceli definovať unárny predikát *Even* pomocou mod , môžeme napísať nasledovnú rekurzívnu klauzálnu definíciu:

pred Even
$Even(0)$
$Even(x + 2) \leftarrow Even(x)$.

Matematicky:

$$x \geq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y) .$$

V CL-ku môžeme spraviť nasledujúcu klauzálnu definíciu:

$0 \geq y$
$x + 1 \geq y + 1 \leftarrow x \geq y$.

Samozrejme $\geq, <, \leq, >, =, \neq$ sú v CL-ku preddefinované. ASCII <=, <, >=, >, =, !=.

6.2.2 Pair. Predikát, ktorý platí keď x je pár.
Matematicky:

$$Pair(x) \leftrightarrow \exists x_1, x_2 (x_1, x_2 = x) \ .$$

Klauzálne:

$Pair(x) \leftarrow x = x_1, x_2$

alebo

$Pair(x_1, x_2)$.

6.2.3 Triple. Predikát, ktorý platí, keď x je trojica.
Matematicky:

$$Triple(x) \leftrightarrow \exists x_1, x_2, x_3 (x_1, x_2, x_3 = x) \ .$$

Klauzálne:

$Triple(x) \leftarrow x = x_1, x_2, x_3$

alebo

$Triple(x_1, x_2, x_3)$.

6.2.4 Ptriple. Predikát, ktorý platí, keď x je pár trojíc.
Matematicky:

$$Ptriple(x) \leftrightarrow \exists x_1, x_2 (x_1, x_2 = x \land Triple(x_1) \land Triple(x_2)) \ .$$

Klauzálne:

$Ptriple \leftarrow x = x_1, x_2 \land Triple(x_1) \land Triple(x_2)$

alebo

$Ptriple(x_1, x_2) \leftarrow Triple(x_1) \land Triple(x_2)$.

6.2.5 Zúplnenie predikátov. Od naších klauzálnych definícii predikátov budeme vyžadovať, aby podobne ako pri definíciach funkcií spĺňali

1. výlučnosť
2. úplnosť
3. podmienku regularity (existenciu miery).

Takisto tieto podmienky nám zaručia, že klauzálna definícia bude korektne definovať reláciu - relácia bude určená jednoznačne a bude existovať. Keď sa pozrieme na predchádzajúce definície, vidíme ihneď, že sú výlučné a rekurzívne aj regulárne. Ako je to s úplnosťou ? Uvedené definície nie sú úplne. Zúplnime ich nasledovne:

$Even \leftarrow x \mod 2 = 0$
$\neg Even \leftarrow x \mod 2 \neq 0$

$Even(0)$
$\neg Even(1)$
$Even(x+2) \leftarrow Even(x)$
$\neg Even(x+2) \leftarrow Even$

$0 \geq y$
$\neg x + 1 \geq 0$
$x + 1 \geq y + 1 \leftarrow x \geq y$
$\neg x + 1 \geq y + 1 \leftarrow \neg x \geq x \geq y$

$\neg Pair \leftarrow x = 0$
$Pair \leftarrow x = x_1, x_2$

alebo

$\neg Pair(0)$
$Pair(x_1, x_2)$

$\neg Triple(x) \leftarrow x = 0$
$\neg Triple(x) \leftarrow x = x_1, 0$
$Triple(x) \leftarrow x = x_1, x_2, x_3$

alebo

$\neg Triple(0)$
$\neg Triple(x_1, 0)$
$Triple(x_1, x_2, x_3)$

$\neg Ptriple(x) \leftarrow x = 0$
$\neg Ptriple(x) \leftarrow x = x_1, x_2 \land \neg Triple(x_1)$
$\neg Ptriple(x) \leftarrow x = x_1, x_2 \land Triple(x_1) \land \neg Triple(x_2)$
$Ptriple(x) \leftarrow x = x_1, x_2 \land Triple(x_1) \land Triple(x_2)$

alebo

$\neg Ptriple(0)$
$\neg Ptriple(x_1, x_2) \leftarrow \neg Triple(x_1)$
$\neg Ptriple(x_1, x_2) \leftarrow Triple(x_1) \land \neg Triple(x_2)$
$Ptriple(x_1, x_2) \leftarrow Triple(x_1) \land Triple(x_2)$.

Vidíme, že teraz naše doplnené klauzálne definície sú naozaj úplne - pre každý prípad existuje klauzula. Avšak všetky doplnené klauzuly sú tvaru

$$\neg \text{hlava} \leftarrow \ldots \ ,$$

to jest sú negatívne. Podobne ako sme zúplňovali funkcie, pre všetky prípady, pre ktorú neexistovala klauzula, sme sa dohodli, že $F(.) = 0$, budeme zúplňovať i predikátové definície: pre všetky prípady, pre ktoré neexistuje klauzula budeme uvažovať negatívne klauzuly $\neg$ hlava $\leftarrow \ldots$, t.j. , že v týchto prípadoch predikát neplatí. Preto v definíciach nikdy nebudeme písať negatívne klauzuly (v CL-ku sú dokonca zakázané). Na základe tejto konvencie sú naše predchádzajúce definície takto implicitne úplne.

Kapitola 7

Charakteristické funkcie

Teraz si povieme niečo o charakteristických funkciach k predikátom a o tom ako pomocou nich vyhodnocujeme, počítame predikáty.

Nech R je predikát, tak charakteristická funkcia k R, označená ako R_* musí spĺňať nasledujúce podmienky:

P1: $R_* = 0 \vee R_*(x) = 1$

P2: $R(x) \leftrightarrow R_*(x) = 1$.

Z toho bezprostredne vyplýva:

$R_*(x) = 1 \rightarrow R(x)$
$R_*(x) = 0 \rightarrow \neg R(x)$

(z $\neg R(x) \leftarrow \neg F_*(x) = 1$ a *P1*). Poďme si nájsť k definovaným predikátom charakteristické funkcie:

$Even_*(x) \leftarrow x \mod 2 = 0$

$Even_*(x) = 0 \leftarrow x \mod 2 \neq 0$ je zúplnenie, ktoré je implicitné, lebo

$$Even_*(x) = 0 \ ,$$

preto ho nemusíme písať.

$Even_*(0) = 1$
$Even_*(1) = 0$ *zúplnenie implicitné*
$Even_*(x+2) = 1 \leftarrow Even_*(x) = 1$
$Even_*(x+2) = 0 \leftarrow Even_*(x) = 0$ *zúplnenie explicitné*

Všimnime si, že klauzuly tvaru $P_*(\bar{a}) = 0 \leftarrow \ldots$ odpovedajú negatívnym klauzulám tvaru $\neg P(\bar{a})$ a na základe našich dvoch dohôd pre implicitné zúplnenie funkčných a predikátových definícií svorne vynacháme. Kedže nechceme zbytočne rozširovať náš výpočtový model a chceme naďalej zostať pri vyhodnocovaní funkcií, predikáty budeme vyhodnocovať pomocou ich charakteristických funckií. Ak charakteristická funkcia sa vyhodnotí do 1 pre daný vstup tak potom predikát pre daný vstup platí. A naopak ak sa char. funkcia vyhodnotí do 0, predikát pre daný vstup neplatí. Príklad:

$0 \leq_* y = 1$
$x+1 \leq_* = 0$ *zúplnenie*
$x+1 \leq_* y+1 = 1 \leftarrow x \leq_* y = 1$
$x+1 \leq_* y+1 = 0 \leftarrow x \leq_* y = 0$ *zúplnenie*

$2 \leq 3$ je true

$2 \leq_* 3 = 1$
$\quad 1 \leq_* 2 = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad 0 \leq_* 1 = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$

$3 \leq 2$ je false

$3 \leq_* 3 = 0$
$\quad 2 \leq_* 1 = 0 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad 1 \leq_* 0 = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$

Skúsme si nasledovný výpočet pre rekurzívnu definíciu $Even(x)$. Budeme počítať $Even(8)$:

$Even_*(8) = 1$
$\quad Even_*(6) = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad Even_*(4) = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad\quad Even_*(2) = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad\quad\quad Even_*(0) = 1 \ \nwarrow^{\text{preto}}$

preto je $Even(8)$ true.
Počítajme $Even(7)$:

$Even_*(7) = 1$
$\quad Even_*(5) = 0 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad Even_*(3) = 0 \ \nwarrow^{\text{preto}}$
$\quad\quad\quad Even_*(1) = 0 \ \nwarrow^{\text{preto}}$

preto je $Even(7)$ false. Takže, predikát $Even$ sa pomocou jeho charakteristickej funkcie vyhodnocuje správne.

$\times Pair_*(x) = 0 \leftarrow x = 0$
$Pair_*(x) = 1 \leftarrow x = x_1, x_2$

alebo

$\times Pair_*(0) = 0$
$Pair_*(x_1, x_2) = 1$

$\times Triple_*(x) = 0 \leftarrow x = 0$
$\times Triple_*(x) = 0 \leftarrow x = x_1, 0$
$Triple_*(x) = 1 \leftarrow x = x_1, x_2, x_3$

alebo

$\times Triple_*(0) = 0$
$\times Triple_*(x_1, 0) = 0$
$Triple_*(x_1, x_2, x_3) = 1$

$\times Ptriple_*(x) = 0 \leftarrow x = 0$
$\times Ptriple_*(x) = 0 \leftarrow x = x_1, x_2 \wedge Triple_*(x_1) = 0$
$\times Ptriple_*(x) = 0 \leftarrow x = x_1, x_2 \wedge Triple_*(x_1) = 1 \wedge Triple_*(x_2) = 0$
$Ptriple_*(x) = 1 \leftarrow x = x_1, x_2 \wedge Triple_*(x_1) = 1 \wedge Ptriple_*(x_2) = 1$

$\times Ptriple_*(0) = 0$
$\times Ptriple_*(x_1, x_2) = 0 \leftarrow Triple_*(x_1) = 0$
$\times Ptriple_*(x_1, x_2) = 0 \leftarrow Triple_*(x_1) = 1 \wedge Triple_*(x_2) = 0$
$Ptriple_*(x_1, x_2) = 1 \leftarrow Triple_*(x_1) = 1 \wedge Triple_*(x_2) = 1$

7.0.6 Predikát Eq.

Zadefinujme si ďalší predikát:

$$Eq(x, y) \leftrightarrow x = y \ .$$

Pomocou párovej rekurzie:

$Eq(0, 0)$
$Eq((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow Eq(x1, y1) \wedge Eq(x_2, y_2)$.

(využívame *P1* vlastnosť párovacej funkcie ","-jej injektívnosť)
Úplná definícia:

$\neg Eq(0)$
$Eq(0, 0)$
$\neg Eq(0, y_1, y_2)$
$\neg Eq((x_1, x_2), 0)$
$\neg Eq((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow \neg Eq(x_1, y_1)$
$\neg Eq((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow Eq(x_1, y_1) \wedge \neg Eq(x_2, y_2)$
$\neg Eq((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow Eq(x_2, y_2)$.

K tomu priamočiaro spravíme charakteristickú funkciu:

$Eq_*(0) = 0$
$Eq_*(0, 0) = 0$
$Eq_*(0, y_1, y_2) = 0$
$Eq_*((x_1, x_2), 0) = 0$
$Eq_*((x_1, x_2), y_1, y_2) = 0 \leftarrow Eq_*(x_1, y_1) = 0$
$Eq_*((x_1, x_2), y_1, y_2) = 0 \leftarrow Eq_*(x_1, y_1) = 1 \wedge Eq_*(x_2, y_2) = 0$
$Eq_*((x_1, x_2), y_1, y_2) = 1 \leftarrow Eq_*(x_1, y_1) = 1 \wedge Eq_*(x_2, y_2) = 1$.

Podobne ako v minulých príkladoch, pozitívne klauzuly z definície predikátu odpovedajú klauzulám s hodnotou 1 v definícií charakteristickej funkcie a negatívne klauzuly-klauzulám s hodnotou 0. Čiže

$$Eq_*(\bar{x}) = 1 \qquad \text{odpovedá} \qquad Eq(\bar{x})$$

a analogicky

$$Eq_*(\bar{x}) = 0 \qquad \text{odpovedá} \qquad \neg Eq(\bar{x}) \ .$$

Na základe tohto faktu dokážeme syntaktycky priamočiaro prepisovať definíciu predikátov na definície ich charakteristických funkcií a naopak. Stačí prepísať

$$\begin{array}{rcl} p(\bar{x}) & \text{na} & p_*(\bar{x}) = 1 \\ \neg p(\bar{x}) & \text{na} & p_*(\bar{x}) = 0 \end{array}$$

a naopak.
Výpočet $Eq_*((0,0),0,0)$:

$Eq_*((0,0),0,0) = 1$
$\quad Eq_*(0,0) = 1 \land Eq_*(0,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $Eq((0,0),0,0)$ je true.
Výpočet $Eq((0,0),0,0,0)$:

$Eq_*((0,0),0,0,0) = 1$
$\quad Eq_*(0,0) = 1 \land Eq_*(0,0,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $Eq((0,0),0,0,0)$ je false.

7.0.7 Byť prvkom. Skúsme si ďalší predikát na zoznamoch: $x \ \varepsilon \ y$ - x je prvkom zoznamu y. Matematicky:

$$x \ \varepsilon \ y \leftrightarrow \exists z_1 \exists z_2 (z_1 \oplus (x, z_2) = y) \ .$$

Klauzálna definícia:

pred/2 ε
$x \ \varepsilon \ (v,y) \leftarrow x = v$
$x \ \varepsilon \ (v,y) \leftarrow x \neq v \land x \ \varepsilon \ y$.

Úplná definícia:

$x \not\varepsilon \ 0$
$x \ \varepsilon \ (v,y) \leftarrow x = v$
$x \ \varepsilon \ (v,y) \leftarrow x \neq v \land x \ \varepsilon \ y$
$x \not\varepsilon \ (v,y) \leftarrow x \neq v \land x \not\varepsilon \ y$.

Charakteristická funkcia:

fun/2 ε_*
$x \ \varepsilon_* \ 0$
$x \ \varepsilon_* \ (v,y) = 1 \leftarrow x = v$
$x \ \varepsilon_* \ (v,y) = 1 \leftarrow x \neq v \land x \ \varepsilon_* \ y = 1$
$x \ \varepsilon_* \ (v,y) = 0 \leftarrow x \neq v \land x \ \varepsilon_* \ y = 0$.

Skúsme si nijaký výpočet.
Výpočet $2 \ \varepsilon \ (1,2,3,0)$:

$2 \ \varepsilon_*(1,2,3,0) = 1$
$\quad 2 \neq 1 \land 2 \ \varepsilon_* \ (2,3,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad 2 = 2 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$,

čiže $2 \ \varepsilon \ (1,2,3,0)$ je true.
Výpočet pre $4 \ \varepsilon_* \ (1,2,3,0)$:

$4 \ \varepsilon_*(1,2,3,0) = 0$
$\quad 4 \neq 1 \land 4 \ \varepsilon_* \ (2,3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad 4 \neq 2 \land 4 \ \varepsilon_*(3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\quad 4 \neq 3 \land 4 \ \varepsilon_* \ 0 = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$,

čiže $4 \ \varepsilon_* \ (1,2,3,0)$ je false.

Poznámka: predikát ε je v CL-ku už preddefinovaný, ASCII označenie: in pre ε, !in pre $\not\varepsilon$. *Prefix*(x,y) je začiatočným podreťazcom y. Matematicky:

$$\mathit{Prefix}(x,y) \leftrightarrow \exists z (x \oplus z = y) \ .$$

Klauzálne *Prefix*:

pred/2 Prefix
$\mathit{Prefix}(0,y)$
$\mathit{Prefix}((x_1,x_2),y_1,y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \land \mathit{Prefix}(x_1,y_2)$.

Úplná definícia:

$\mathit{Prefix}(0,y)$
$\neg\mathit{Prefix}((x_1,x_2),0)$
$\neg\mathit{Prefix}((x_1,x_2),y_1,y_2) \leftarrow x_1 \neq y_1$
$\neg\mathit{Prefix}((x_1,x_2),y_1,y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \land \neg\mathit{Prefix}(x_2,y_2)$
$\mathit{Prefix}((x_1,x_2),y_1,y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \land \mathit{Prefix}(x_2,y_2)$.

Charakteristická funkcia:

fun/2 Prefix_*
$\mathit{Prefix}_*(0,y) = 1$
$\mathit{Prefix}_*((x_1,x_2),0) = 0$
$\mathit{Prefix}_*((x_1,x_2),y_1,y_2) = 0 \leftarrow x_1 \neq y_1$
$\mathit{Prefix}_*((x_1,x_2),y_1,y_2) = 0 \leftarrow x_1 = y_1 \land \mathit{Prefix}_*(x_2,y_2) = 0$
$\mathit{Prefix}_*((x_1,x_2),y_1,y_2) = 1 \leftarrow x_1 = y_1 \land \mathit{Prefix}_*(x_2,y_2) = 1$.

Výpočet $\mathit{Prefix}((1,2,0),1,2,3,0)$:

$\mathit{Prefix}_*((1,2,0),1,2,3,0) = 1$
$\quad 1 = 1 \land \mathit{Prefix}_*((2,0),(2,3,0)) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad 2 = 2 \land \mathit{Prefix}_*(0,3,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $\mathit{Prefix}((1,2,0),1,2,3,0)$ je true.
Výpočet $\mathit{Prefix}((1,3,0),1,2,3,0)$:

$\mathit{Prefix}_*((1,3,0),1,2,3,0) = 0$
$\quad 1 = 1 \land \mathit{Prefix}_*((3,0),2,3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad 3 \neq 2 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $\mathit{Prefix}((1,3,0),1,2,3,0)$ je false.

7.0.8 Suffix.

$\mathit{Suffix}(x,y)$ - x je koncovým podreťazcom y. Matematicky:

$$\mathit{Suffix}(x,y) \leftrightarrow \exists z(z \oplus x = y) \ .$$

Klauzálne:

pred/2 Suffix
$\mathit{Suffix}(x,0) \leftarrow x = 0$
$\mathit{Suffix}(x,y_1,y_2) \leftarrow x = y_1,y_2$
$\mathit{Suffix}(x,y_1,y_2) \leftarrow x \neq y_1,y_2 \land \mathit{Suffix}(x,y_2)\ .$

Úplná definícia:

$\mathit{Suffix}(x,0) \leftarrow x = 0$
$\neg\mathit{Suffix}(x,0) \leftarrow x \neq 0$
$\mathit{Suffix}(x,y_1,y_2) \leftarrow x = y_1,y_2$
$\mathit{Suffix}(x,y_1,y_2) \leftarrow x \neq y_1,y_2 \land \mathit{Suffix}(x,y_2)$
$\neg\mathit{Suffix}(x,y_1,y_2) \leftarrow x \neq y_1,y_2 \land \neg\mathit{Suffix}(x,y_2)\ .$

Charakteristická funkcia Suffix_*:

fun/2 Suffix$_*$
$\mathit{Suffix}_*(x,0) = 1 \leftarrow x = 0$
$\mathit{Suffix}_*(x,0) = 0 \leftarrow x \neq 0$
$\mathit{Suffix}_*(x,y_1,y_2) = 1 \leftarrow x = y_1,y_2$
$\mathit{Suffix}_*(x,y_1,y_2) = 1 \leftarrow x \neq y_1,y_2 \land \mathit{Suffix}_*(x,y_2) = 1$
$\mathit{Suffix}_*(x,y_1,y_2) = 0 \leftarrow x \neq y_1,y_2 \land \mathit{Suffix}_*(x,y_2) = 0\ .$

Výpočet $\mathit{Suffix}(2,3,0),1,2,3,0)$:

$\mathit{Suffix}_*((2,3,0),1,2,3,0) = 1$
$\quad 2,3,0 \neq 1,2,3,0 \land \mathit{Suffix}_*((2,3,0),2,3,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad 2,3,0 = 2,3,0 \quad \nwarrow^{\mathit{preto}}$

čiže $\mathit{Suffix}((2,3,0),1,2,3,0)$ je true.
Výpočet $\mathit{Suffix}((1,3,0),1,2,3,0)$:

$\mathit{Suffix}_*((1,3,0),1,2,3,0) = 0$
$\quad 1,3,0 \neq 1,2,3,0 \land \mathit{Suffix}_*((1,3,0),2,3,0) = 0 \land \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad 1,3,0 \neq 2,3,0 \land \mathit{Suffix}_*((1,3,0),3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\quad 1,3,0 \neq 3,0 \land \mathit{Suffix}_*((1,3,0),0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad 1,3,0 \neq 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $\mathit{Suffix}((2,3,0),1,2,3,0)$ je false.

7.0.9 Podreťazec.

$\mathit{Substr}(x,y)$ -x je podreťazcom y.
Matematicky:

$$\mathit{Substr}(x,y) \leftrightarrow \exists z_1,z_2(z_1 \oplus x \oplus z_2 = y)\ .$$

Klauzálne:

pred/2 Substr
$\mathit{Substr}(x,0) \leftarrow= 0$
$\mathit{Substr}(x,y_1,y_2) \leftarrow \mathit{Ptrefix}(x,y_1,y_2)$
$\mathit{Substr}(x,y_1,y_2) \leftarrow \neg\mathit{Prefix}(x,y_1,y_2) \land \mathit{Substr}(x,y_2)\ .$

Úplná definícia:

$\mathit{Substr}(x,0) \leftarrow x = 0$
$\neg\mathit{Substr}(x,0) \leftarrow x \neq 0$
$\mathit{Substr}(x,y_1,y_2) \leftarrow \mathit{Prefix}(x,y_1,y_2)$
$\neg\mathit{Substr}(x,y_1,y_2) \leftarrow \neg\mathit{Prefix}(x,y_1,y_2) \land \neg\mathit{Substr}(x,y_2)\ .$

Charakteristická funkcia:

fun/2 Substr
$\mathit{Substr}_*(x,0) = 1 \leftarrow x = 0$
$\mathit{Substr}_*(x,0) = 0 \leftarrow x \neq 0$
$\mathit{Substr}_*(x,y_1,y_2) = 1 \leftarrow \mathit{Prefix}(x,y_1,y_2)$
$\mathit{Substr}_*(x,y_1,y_2) = 1 \leftarrow \neg\mathit{Prefix}(x,y_1,y_2) \land \mathit{Substr}_*(x,y_2) = 1$
$\mathit{Substr}_*(x,y_1,y_2) = 0 \leftarrow \neg\mathit{Prefix}(x,y_1,y_2) \land \mathit{Substr}_*(x,y_2) = 0\ .$

Výpočet $\mathit{Substr}((1,2,0),3,4,1,2,3,0)$:

$\mathit{Substr}_*((1,2,0),3,4,1,2,3,0) = 1$
$\quad \neg\mathit{Prefix}((1,2,0),3,4,1,2,3,0) \land \mathit{Substr}_*(1,2,0),4,1,2,3,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad \neg\mathit{Prefix}((1,2,0),4,1,2,3,0) \land \mathit{Substr}_*(1,2,0),1,2,3,0) = 1 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad \mathit{Prefix}((1,2,0),1,2,3,0) \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $\mathit{Substr}((1,2,0),3,4,2,3,0)$ je true.
Výpočet $\mathit{Substr}((1,2,0),3,4,3,0)$:

$\mathit{Substr}_*((1,2,0),3,4,3,0) = 0$
$\quad \neg\mathit{Prefix}((1,2,0),3,4,3,0) \land \mathit{Substr}_*(1,2,0),4,3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad \neg\mathit{Prefix}((1,2,0),4,3,0) \land \mathit{Substr}_*(1,2,0),3,0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\quad \neg\mathit{Prefix}((1,2,0),3,0) \land \mathit{Substr}_*(1,2,0),0) = 0 \quad \nwarrow^{\text{preto}}$
$\qquad\qquad \mathit{Prefix}((1,2,0),1,2,3,0) \quad \nwarrow^{\text{preto}}$

čiže $\mathit{Substr}((1,2,0),3,4,3,0)$ je false.

Kapitola 8

Unárne predikáty verzus n-árne

Podobne ako pri funkciach aj pomocou unárnych predikátov a párovacej funckie, dokážeme vyjadriť n-árne predikáty. Nech p je n-árny predikát, budeme k nemu definovať unárnu kontrakciu $< p >$ nasledovne:

$$< p > (x) \leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n (x = \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{párovače}} \wedge p(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{oddelovače}})) \ .$$

Potom platí:

$$< p > (\overbrace{(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{párovače}})}^{\text{jeden argument}} \leftrightarrow p(\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{\text{oddelovače}}) \ .$$

Ak p je unárny predikát tak potom $< p >= p$. CL-ko umožnuje definovať lubovoľné n-árne predikáty: $pred/n/p$; ak zapíšeme iba $pred/p$ tak je to skratka za pred $pred/1/p$. Konvencia:nech p je n-árny predikát a $m \geq n$ tak potom

$$p(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$$

chápeme ako

$$p(\underbrace{x_1, \ldots, x_{n-1}}_{\text{oddelovače}}, \underbrace{(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)}_{\text{párovače}}) \ ;$$

Ak $m < n$ tak ide o syntakticky chybný zápis.

1. argument je x_1

$n-1$. argument je $x_n - 1$

n. argument je $(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$.

8.1 Preddefinované predikáty (formáty)

8.1.1 $N(x)$.

$$N(x) \leftrightarrow x \text{ je prirodzené číslo}$$

Kedže uvažujeme prirodzené čísla, vždy pravdivý.
Klauzálna definícia:

$N(0)$
$N(x+1) \leftarrow N(x)$.

Má bočný zobrazovací efekt: keď napíšeme v okienku `Query` τ`=x:N` (použije `N` ako formát), v okienku `Results` dostaneme

`true for:`
`x=`decimálna konštanta ,

čiže hodnota x-prirodzené číslo sa sformátuje a zobrazí do decimálnej konštanty.

8.1.2 $N2(x)$.

$$N2(x) \leftrightarrow x \text{ je prirodzené číslo}$$

Klauzálna definícia:

$N2(0)$
$N2(x_1) \leftarrow N2(x)$
$N2(x_2) \leftarrow N2(x)$,

kde

$S1(x) = 2x + 1 = x_1$
$S2(x) = 2x + 2 = x_2$.

Má bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:N2`
- `Results:`

  `true for:`
  `x=`diadická konštanta

Napríklad: `8=x:N2`$\rightarrow$`x=`0_{112}.

8.1.3 $P(x)$.

$$P(x) \leftrightarrow x \text{ je prirodzené číslo}$$

Klauzálna definícia:

$P(0)$
$P(x, y) \leftarrow P \wedge P(y)$.

Bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:P`
- `Results:`

  `true for:`
  x=párový, čiarkový numeral (čiarková konštanta)

Napríklad: `8=x:P`$\rightarrow$`x=((0,0),0),0)`.

8.1.4 $M(x)$.

$$M(x) \leftrightarrow x \text{ je prirodzené číslo}$$

Klauzálna definícia:

$M(x)$.

Vždy platí, pre ľubovoľné x.
Bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:M`
- `Results:`

  `true for:`
  x=mixovaná čiarkovodefinovaná konštanta

Napríklad.: `8,7=x:M`$\rightarrow$`x=8,7` alebo `8,S1S2(0)=x:M`$\rightarrow$`x=8,5`.

8.1.5 $Ch(x)$.

$$Ch(x) \leftrightarrow x < 256$$

Klauzálna definícia:

$Ch(x) \leftarrow x < 256$.

Bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:Ch`
- `Results:`

  `true for:`
  (ak hodnota $x < 256$) x="znak s ASCII hodnotou x"

Napríklad: `100=x:Ch`$\rightarrow$`x="d"` alebo `300=x:Ch`$\rightarrow$`x=?C?(300)`.
Napríklad: `"d"=x(:M)`$\rightarrow$`x=100`.

8.1.6 $Ln(x)$.

$$Ln(x) \leftrightarrow x \text{ je zoznam}$$
$$x \text{ je prirodzené číslo}$$

Klauzálna definícia:

$Ln(0)$
$Ln(x, y) \leftarrow N(x) \wedge Ln(y)$.

Bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:Ln`
- `Results:`

  `true for:`
  x=$x_1, x_2, \ldots, x_k, 0$; kde x_i sú decimálne konštanty

Napríklad: `100=x:Ln`$\rightarrow$`x=0,16,0` alebo `9=x:Ln`$\rightarrow$`x=0,0,0,0,0`.

8.1.7 $Str(x)$.

$$Str(x) \leftrightarrow x \text{je reťazec, zoznam charov } x = x_1, \ldots, x_n, 0; \text{ kde } x_i < 256$$

Klauzálna definícia:

$Str(0)$
$Str(x, y) \leftarrow Ch(x) \wedge Str(y)$.

Bočný zobrazovací efekt:

- `Query:` τ`=x:Str`
- `Results:`

  `true for:`
  `x = `$'c_1 \ldots c_k'$, kde τ`=x:Ln`$\rightarrow$`x=`$x_1, \ldots, x_k, 0$ a x_i je ASCII hodnota pre znak c_i

Napríklad:

- `300,0 = x:Str`$\rightarrow$`x=?S?(300,0)`
- `100,101,102,0=x:Str`$\rightarrow$`'def'`
- `'def'=x(:ln)(:M)`$\rightarrow$`100,101,102,0`
- konštantu- reťazec $'c_1 \ldots c_k'$ môžeme používať, je skratkou za zoznam $x_1, \ldots, x_k, 0$; kde x_i je ASCII hodnota c_i

- v reťazci môžete zadať znak c_i aj ako x_i, kde x_i je ASCII hodnota (3 miestna) c_i.
- V module `Standard` sú zadefinované štandardné definície. Dostane sa tam tak, že sa nastavíte na čiarku nad `incl Standard` a stlačíte F4 (rozbalíte aj zbalíte okno).
- môžeme rozbyť i zložené ciele: τ_1=x:F_1 & τ_2=y:$F_2 \ldots$

8.1.8 Možnosť definovania predikátov. Môžeme si aj my definovať predikáty- formáty typu *Ln* či *Str*. Všeobecná schéma:

$Lt(0)$
$Lt(x, y) \leftarrow T(x) \wedge Lt(y)$

kde T je nejaký predikát s bočným zobrazovacím efektom. Potom ak zadáme v `Query` τ=`x:Lt`, dostaneme v `Results`

`true for:`
x=x_1:T,$\ldots$,x_k:T,0; kde $x = x_1, \ldots, x_k, 0$.

Napríklad:

$Ln2(0)$
$Ln2(x, y) \leftarrow N2(x) \wedge Ln2(y)$

- x:*Ln2* sa zapíše ako zoznam diadických konštánt
- `4,5,6,0 = x:Ln2` $\leftarrow$ $0_{12}, 0_{21}, 0_{22}, 0$

$Lln(0)$
$Lln(x, y) \leftarrow Ln(x) \wedge Lln(y)$

- x:*Lln* sa zapíše ako zoznam, zoznamov (s decimálnymi konštantami).
- `4,5,6=x:Lln→(0,0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),0`
- `1,2,4,9,0=x:Lln→(0,0),(0,0,0),(0,0,0,0),(0,0,0,0,0),0`

$Lln2(0)$
$Lln2(x, y) \leftarrow Ln2(x) \wedge Lln2(y)$

- `x:Lln2` sa zapíše ako zoznam, zoznamov s diadickými konštantami.
- `(4,5,0),(6,7,),0=x:Lln2→`$(0_{12}, 0_{21}, 0), (0_{22}, 0_{111}, 0), 0$

$Lstr(0)$
$Lstr(x, y) \leftarrow Str(x) \wedge Lstr(y)$

- `x:Lstr` sa zapíše ako zoznam reťazcov
- `(97,98,0),(99,100,0),0=x:Lstr→'ab','cd',0`

Taktiež môžeme definovať i kartézsky súčin typov:

$R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow T_1(x_1) \wedge \ldots \wedge T_n(x_n)$,

kde T_i je nijaký predikát s bočným zobrazovacím efektom. Potom ak zadáme v `Query` $T = x : R$ dostaneme v `Results`

`true for:`
$x_1 : T_1, \ldots, x_k : T_k$; kde $x = x_1, \ldots, x_k$.

Napríklad:

$Nch(x, y) \leftarrow N(x) \wedge Ch(x)$

`99,100=x:Nch→99,"d"`

$Nchd(x, y, z) \leftarrow N(x) \wedge Ch(y) \wedge N2(z)$

`99,100,5=x:Nchd→99,"d",`0_{21} .

Kapitola 9

Množiny

Na mimulích prednáškach sme si ukázali ako implementovať, kódovať zoznamy, zložitejší dátový typ, pomocou prirodzených čísel a párovacej funkcie ",". Teraz sa budeme zaoberať ďalším typom - koňečnými množinami prírodzených čísel. Budeme ich reprezentovať pomocou ostro usporiadaných zoznamov. Číslo $a = x_1, \ldots, x_n, 0$, kde $x_1 < x_2 < x \ldots < x_n$, bude kódom konečnej množiny prirodzených čísel $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Predikát $Ord(x)$, ktorý platí ak x je ostro usporiadaný zoznam, má nasledovnú definíciu.
Matematicky:

$$Ord(x) \leftrightarrow \forall y, a, b, z(x = y \ \oplus \ (a, b, z) \rightarrow a < b) \ .$$

Klauzálne:

$Ord(0)$
$Ord(x, 0)$
$Ord(x, y, z) \leftarrow x < y \wedge Ord(y, z)$.

Za množinu budeme považovať ostro usporiadnaý zoznam. Matemticky

$$Set(x) \leftrightarrow Ord(x) \ .$$

Klauzálne

$Set(x) \leftarrow Ord(x)$.

9.1 Operácie na množinách

Poďme si naprogramovať základné opereácie a predikáty na množinách.

9.1.1 Prázdna množina. Matematicky:

$$Set \rightarrow Empty(x) \leftrightarrow x = 0 \ .$$

Klauzálne:

$Empty(0)$.

9.1.2 Byť prvkom nožiny. Matematicky:

$$Set \rightarrow x \in y \leftrightarrow x \ \varepsilon \ y \ .$$

Klauzálne:

$x \in y \leftarrow x \ \varepsilon \ y$.

Bez ε využijúc usporiadanosť y:

$x \in (y_1, y_2) \leftarrow x = y_1$
$x \in (y_1, y_2) \leftarrow x > y_1 \wedge x \in y_2$.

9.1.3 Rovnosť dvoch množín.

1. pomocou zabudovaného =
   Matematicky:
   $$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow x \equiv y \leftrightarrow x = y.$$
   Klauzálne:
   $x \equiv y \leftarrow x = y$.
2. využívajúc vlastnosť- axiómu množín, že dve množiny sa rovnajú, ak majú rovnaké prvky:
   Matematicky:
   $$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow x \equiv y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \ .$$
   Klauzálne (využijeme usporiadanosť zoznamov reprezentajúcich množiny):
   $0 \equiv 0$
   $(x_1, x_2) \equiv (y_1, y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 \equiv y_2$.

9.1.4 Podmnožina. Matematicky:

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow x \leq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y) \ .$$

Klauzálne:

$0 \subseteq (y_1, y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 \subseteq y_2$
$(x_1, x_2) \subseteq (y_1, y_2) \leftarrow x_1 > y_1 \wedge (x_1, x_2) \subseteq y_2$.

9.1.5 Prienik dvoch množín. Matematicky:

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow Set(x \cap y)$$
$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow \forall z(z \in x \cap y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y) \ .$$

Klauzálne:

$0 \cap y = 0$
$(x_1, x_2) \cap 0 = 0$
$(x_1, x_2) \cap (y_1, y_2) = x_1, x_2 \cap y_2 \leftarrow x_1 = y_1$
$(x_1, x_2) \cap (y_1, y_2) = x_2 \cap (y_1, y_2) \leftarrow x_1 < y_1$
$(x_1, x_2) \cap (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \cap y_2 \leftarrow x_1 > y_1$.

9.1.6 Rozdiel dvoch množín. Matematicky:

$$Set \wedge Set(y) \rightarrow Set(x \setminus y)$$
$$Set \wedge Set(y) \rightarrow \forall z(z \in x \setminus y \leftrightarrow z \in x \wedge z \in y)\ .$$

Klauzálna definícia:

$0 \setminus y = 0$
$(x_1, x_2) \setminus 0 = x_1, x_2$
$(x_1, x_2) \setminus (y_1, y_2) = x_2 \setminus y_2 \leftarrow x_1 = y_1$
$(x_1, x_2) \setminus (y_1, y_2) = x_1, x_2 \setminus (y_1, y_2) \leftarrow x_1 < y_1$
$(x_1, x_2) \setminus (y_1, y_2) = (x_1, x_2) \setminus y_2 \leftarrow x_1 > y_1\ .$

9.1.7 Zjednotenie dvoch množín. Matematicky:

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow Set(x \cup y)$$
$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow \forall z(z \in x \cup y \leftrightarrow z \in x \vee z \in y)\ .$$

Klauzálne:

$0 \cup y = 0$
$(x_1, x_2) \cup 0 = x_1, x_2$
$(x_1, x_2) \cup (y_1, y_2) = x_1, x_2 \cup y_2 \leftarrow x_1 = y_1$
$(x_1, x_2) \cup (y_1, y_2) = x_1, x_2 \cup (y_1, y_2) \leftarrow x_1 < y_1$
$(x_1, x_2) \cup (y_1, y_2) = y_1, (x_1, x_2) \cup y_2 \leftarrow x_1 > y_1\ .$

9.1.8 Symetrická definícia dvoch množín. Matematická definícia:

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow Set(x \bigtriangleup y)$$
$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow x \bigtriangleup y = (x\setminus) \cup (y \setminus x)\ .$$

Klauzálna definícia:

$0 \bigtriangleup y = y$
$(x_1, x_2) \bigtriangleup 0 = x_1, x_2$
$(x_1, x_2) \bigtriangleup (y_1, y_2) = x_2 \bigtriangleup y_2 \leftarrow x_1 = y_1$
$(x_1, x_2) \bigtriangleup (y_1, y_2) = x_1, x_2 \bigtriangleup (y_1, y_2) \leftarrow x_1 < y_1$
$(x_1, x_2) \bigtriangleup (y_1, y_2) = y_1, (x_1, x_2)\bigtriangleup \leftarrow x_1 > y_1\ .$

9.1.9 Disjunktné množiny. Matematická definícia:

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow \forall x \diamond y \leftrightarrow x \cap y = 0$$

alebo

$$Set(x) \wedge Set(y) \rightarrow \forall x \diamond y \leftrightarrow x \cup y = x \bigtriangleup y\ .$$

Vieme, že $x \cup y \supseteq x \bigtriangleup y$. Klauzálna definícia:

$0 \diamond y$
$(x_1, x_2) \diamond 0$
$(x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) \leftarrow x_1 < y_1 \wedge x_2 \diamond (y_1, y_2)$
$(x_1, x_2) \diamond (y_1, y_2) \leftarrow x_1 > y_1 \wedge (x_1, x_2) \diamond y_2\ .$

Kapitola 10

Kombinatorické úlohy na zoznamoch

10.1 Základné operácie

10.1.1 Interleave. Skúsme si zadefinovať funkciu $Interleave(x, y)$; kde x je nejaký prvok; y je zoznam; ktorá nám vráti zoznam všetkých vložení prvku x do zoznamu y. Napríklad:

$$Interleave(1, 2, 3, 0) = (1, 2, 3, 0), (2, 1, 3, 0), (2, 3, 1, 0), 0.$$

Matematická špecifikácia:

$$z\ \varepsilon\ Interleave(x, y) \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (y = y_1 \oplus y_2 \wedge z = y_1 \oplus (x, y_2))\ .$$

Klauzálna definícia:

$Interleave(x, 0) = (x, 0), 0$
$Interleave(x, y_1, y_2) = (x, y_1, y_2), Map_1(y_1, Interleave(x, y_2))\ ,$

kde

$Map_1(x, 0) = 0$
$Map_1(x, y_1, y_2) = (x, y_1), Map_1(x, y_2)\ .$

10.1.2 Subsequence. Zadefinujme si predikát *Subsequence*, ktorý platí ak zoznam x je podpostupnosťou (vybranou postupnosťou) zoznamy y. Matematická definícia:

$$\begin{aligned} Subsequence(x, y) \leftrightarrow & \exists i(Ord(i) \wedge L(i) = L(x) \wedge i \neq 0 \rightarrow Last(i) < L(y) \wedge \\ & Maxl(i) < L(y) \wedge \\ & \forall j < L(x)(Take(j, x) = Take(Take(j, i), y)))\ . \end{aligned}$$

Čiže existuje korektná rastúca postupnosť indexov i taká, že

$$\forall j < L(i) : x_j = y_j \ .$$

Klauzálna definícia:

$Subsequence(0, y)$
$Subsequence((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \wedge Subsequence(x_2, y_2)$
$Subsequence((x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow x_1 \neq y_1 \wedge Subsequence((x_1, x_2), y_2) \ .$

10.1.3 Subseqlist. Teraz skúsme pre daný zoznam y vytvoriť zoznam všetkých podpostupností y-nu.
Matematicky:

$$x \,\varepsilon\, Subseqlist(y) \leftrightarrow Subseqlist(x, y) \ .$$

Klauzálne:

$Subseqlist(0) = 0, 0$
$Subseqlist(y_1, y_2) = Map_2(y_1, Subseqlist(y_2)) \ ,$

kde

$Map_2(x, 0) = 0$
$Map_2(x, y_1, y_2) = (x, y_1), y_1, Map_2(x, y_2) \ .$

10.1.4 Zoznam všetkých k-prvkovýh podpostupností y-nu. k-prvková podpostupnosť x postupnosti y je definovaná nasledovne:

$$Subsequence_k(k, x, y) \leftrightarrow Subsequence(x, y) \wedge L(x) = k \ .$$

Klauzálne:

$Subsequence_k(k, x, y) \leftarrow L(x) = k \wedge Subsequence_k$
$Subsequence_k(k+1, (x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \wedge Subsequence_k(k, x_2, y_2)$
$Subsequence_k(k+1, (x_1, x_2), y_1, y_2) \leftarrow x_1 \neq y_1 \wedge Subsequence_k(k, (x_1, x_2), y_2) \ .$

Skúsme pre dané k a zoznam y vytvoriť zoznam všetkých k-prvkových podpostupností y-nu- $Subsequence_k(k, y)$.
Matematicky:

$$x \in Subseqlist_k(k, y) \leftrightarrow Subsequence_k(k, x, y) \ .$$

Klauzálne:

$Subseqlist_k(0, y) = 0, 0$
$Subseqlist_k(k+1, 0) = 0$
$Subseqlist_k(k+1, y_1, y_2) = Map_3(y_1, Subseqlist_k(k, y_2) \oplus Subseqlist_k(k+1, y_2)$

$Map_3(x, 0) = 0$
$Map_3(x, y_1, y_2) = (x, y_1), Map_3(x, y_2) \ .$

10.1.5 Partition. Zadefinujme si predikát $Partition(x, y)$, ktorý platí ak $x = x_1, \ldots, x_n, 0$ $(x_i \neq 0)$ a $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = y$. Čiže x je akýsi "rozsekanie" zoznamu y na neprázdne časti x_i, ktoré dokopy po konkatenácii dávaju opäť zoznam y.
Matematicky:

$$Partition(x, y) \leftrightarrow Union(x) = y \wedge 0 \not\varepsilon\, x \ ,$$

kde

$$Union(0) = 0$$
$$Union(x_1, x_2) = x_1 \oplus Union(x_2) \ .$$

Skúsme si teraz zadefinovať funkciu $Parts(y)$, ktorá nám vrátí zoznam všetkých "rozsekaní" y-nu na neprázdne časti.
Matematicky:

$$x \in Parts(y) \leftrightarrow Partition(x, y) \ .$$

Klauzálne:

$Parts = 0, 0$
$Parts(y_1, y_2) = Map_4(y_1, Parts(y_2)) \ ,$

kde

$Map_4(x, 0) = 0$
$Map_4(x, 0, y_2) = ((x, 0), 0), Map_4(x, y_2)$
$Map_4(x, (y_{11}, y_{12}), y_2) = ((x, 0), y_{11}, y_{12}), ((x, y_{11}), y_{12}), Map_4(x, y_2)$

$Parts(0) = 0, 0$
$Parts(y_1, 0) = ((y_1, 0), 0$
$Parts(y_1, y_2, y_3) = Map_4(y_1, Parts(y_2, y_3)) \ .$

Pripomenme, že konečná postupnosť prirodzených čísel 0 dĺžke $n \geq 0$ je unárna funkcia tvaru $f : \{0, \ldots, n-1\} \to \mathbb{N}$. Konečnú postupnosť prirodzených čísel $x_0, \ldots, x_{n-1}$ o dĺžke n môžeme priamo kódovať číslom, zoznamom $\bar{x} = x_0, \ldots, x_{n-1}, 0$ $(L = n)$. Prázdnu postupnosť, $n = 0$, je teda kódovaná prázdnym zoznamom.

10.1.6 Permutácia. Permutáciou o dĺžke n budeme rozumieť konečnú postupnosť, ktorá je bijekciou na množine $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Skúsme si zadefinovať funkciu $Perms(n)$, ktorá vráti zoznam všetkých permutícií o dlžke n:

$Perms(0) = 0, 0$
$Perms(n+1) = Map_5(n, Perms(n))$
$Map_5(x, 0) = 0$
$Map_5(x, y_1, y_2) = Interleave \oplus Map_5(x, y_2) \ .$

10.2 Triedenia

Teraz sa budeme zaoberať skupinou funkcií, ktoré nám dokážu vstupný neusporiadaný zoznam usporiadať podľa velkosti prvkov-čísel.

Najskôr si zadefinujme predikát $Ordl(x)$, ktorý platí ak zoznam x je (neostro) usporiadaný:
Matematická definícia:

$$Ordl(x) \leftrightarrow \forall y, a, b, z(x = y \oplus (a, b, z) \rightarrow a \leq b) \ .$$

Klauzálna definícia:

$Ordl(0)$
$Ordl(x, 0)$
$Ordl(x, y, z) \leftarrow x \leq y \wedge Ordl(y, z) \ .$

Okrem usporiadanosti od výstupného zoznamu budeme ešte vyžadovať, aby bol preusporiadaním- premutáciou vstupného zoznamu. Definujeme si predikát $Perm(x, y)$, ktorý platí ak zoznam x je permutáciou zoznamu y.
matematicky:

$$Perm(0, y) \leftrightarrow y = 0$$
$$Perm((x_1, x_2), y) \leftrightarrow \exists y_1, y_2(y = y_1 \oplus (x_1, y_2) \wedge Perm(x_2, y_1 \oplus y_2) \ .$$

Z toho dostávame nasledovnú klauzálnu definíciu:

$Perm(0, 0)$
$Perm((x_1, x_2), y) \leftarrow Mem(x_1, y) = y_1, y_2 \wedge Perm(x_2, y_1 \oplus y_2 \ ,$

kde pomocná funkcia $Mem(x, y)$ má nasledovné vlastnosti:

$$x \ \varepsilon \ y \rightarrow \exists y_1, y_2(Mem(x, y) = y_1, y_2 \wedge y = y_1 \oplus x, y_2)$$
$$x \not\varepsilon \ y \rightarrow Mem(x, y) = 0 \ .$$

Klauzálna definícia:

$Mem(x, 0) = 0$
$Mem(x, y_1, y_2) = 0, y_2 \leftarrow x = y_1$
$Mem(x, y_1, y_2) = (y_1, v_1), v_2 \leftarrow x \neq y_1 \wedge Mem(x, y_2) = v_1, v_2 \ .$

Teraz môžeme triedenia formálnejšie charakterizovať. Funkcia-triedenie $Sort(x)$ musí spĺňať tieto dve vlastnosti:

1. $Ordl(Sort(x))$
2. $Perm(x, Sort(x))$

V ďalšej časti budeme implementovať 3 triediace metódy:*Insertsort*, *Mergesort* a *Quicksort*.

10.2.1 Insertsort. Táto metóda triedania ja založená na vkladaní prvku do už usporiadaného zoznamu, tak aby usporiadanie nového zoznamu ostalo zachované. Môžeme si zadefinovať pomocnú funkciu $Insert(x, y)$, ktorá vloží prvok x do usporiadaného zoznamu y a zachová usporiadanie. Matematicky by sme ju mohli charakterizovať týmito vlastnosťami:

1. $Ordl(y) \rightarrow Ordl(Insert(x, y))$
2. $Ordl(y) \rightarrow Perm((x, y), Insert(x, y)) \ .$

Klauzálna definícia:

$Insert(x, 0) = x, 0$
$Insert(x, y_1, y_2) = x, y_1, y_2 \leftarrow x \leq y_1$
$Insert(x, y_1, y_2) = y_1, Insert(x, y_2) \leftarrow x > y_1 \ .$

Celé triedenie vyzerá potom tak, že najskôr utriedime rekurzívne zvyšok vstupného zoznamu bez prvého prvku a ten potom vložíme (pomocou funkcie *Insert*) do už utriedaného zvyšku zoznamu.

$Inert(0) = 0$
$Insert(x, y) = Insert(x, Insert(y)) \ .$

10.2.2 Mergesort. Triedenie je založené na nasledovnom princípe:

1. vstupný zoznam sa rozdelí na dva približne rovnake dlhé podzoznamy, t.j. ich dĺžky sa rovnajú alebo líšia o jedna.
2. tie sa rekurzívne utriedia
3. a nakoniec spoja - *merge* do výsledného usporiadaného zoznamu.

1.krok sa realizuje pomocou funkcie $Msplit(x)$, ktorú môžeme nasledovne formalizovať:

$$\begin{aligned} \exists y, z(Msplit(x) = y, z \wedge L(x) = L(y) + L(z) \wedge \\ (L(y) = L(z) \vee L(y) = L(z) + 1) \wedge \\ \forall i(2 \cdot i < L(x) \rightarrow Take(2 \cdot i, x) = Take(i, y)) \wedge \\ \forall i(2 \cdot i + 1 < L(x) \rightarrow Take(2 \cdot i + 1, x) = Take(i, z))) \ . \end{aligned}$$

Klauzálna definícia:

$Msplit(0) = 0, 0$
$Msplit(x, 0) = (x, 0), 0$
$Msplit(x, y, z) = (x, v_1), y, v_2 \leftarrow Msplit(z) = v_1, v_2 \ .$

2.krok spojenie(*mergovanie*) dvoch usporiadaných zoznamov do opäť utriedeného zoznamu naimplementujeme pomocou funkcie *Merge*, ktorá má nasledovné vlastnosti:

1. $Ordl(x) \wedge \leftarrow Ordl(y) \rightarrow Ordl(Merge(x, y))$,
2. $Perm(x \oplus y, Merge(x, y))$.

Klauzálna definícia:

$$
\begin{aligned}
&Merge(0, y) = y \\
&Merge((x_1, x_2), 0) = x_1, x_2 \\
&Merge((x_1, x_2), y_1, y_2) = x_1, y_1, Merge(x_2, y_2) \leftarrow x_1 = y_1 \\
&Merge((x_1, x_2), y_1, y_2) = y_1, Merge((x_1, x_2), y_2) \leftarrow x_1 > y_1 \\
&Merge((x_1, x_2), y_1, y_2) = x_1, Merge(x_2, (y_1, y_2)) \leftarrow x_1 < y_1 \ .
\end{aligned}
$$

Celé triedenie môžeme zadefinovať nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&Msort(0) = 0 \\
&Msort(x, 0) = x, 0 \\
&Msort(x, y, z) = Merge(Msort(v_1), Msort(v_2)) \leftarrow Msplit(x, y, z) = v_1, v_2 \ .
\end{aligned}
$$

10.2.3 Quicksort.

Triedenie ja postavené na nasledujúcej metóde:

1. zo vstupného zoznamu vyberieme jeden prvok-*pivot* (v našej implementácii sa obmedzíme na prvý prvok zoznamu pre jednoduchosť),
2. zoznam rozdelíme na dva podzoznamy, v prvom podzozname budú prvky menšie alebo rovné ako pivot a v druhom zase väčsie,
3. podzoznamy rekurzívne utriedime a spojíme-*skonkatenujeme* do výsledného zoznamu.

1. a 2. krok zrealizujeme pomocou funkcie $Qsplit(p, x)$, kde p-pivot je prvým prvkom zoznamu a x jeho zvyškom. Funkcia má tieto vlastnosti:

$$
\begin{gathered}
\exists y, z(Qsplit(p, x) = y, z \wedge \forall v(v \,\varepsilon\, y \rightarrow v \leq p) \wedge \\
\forall v(v \,\varepsilon\, z \rightarrow v > p) \wedge Perm(x, y \oplus z) \ .
\end{gathered}
$$

Klauzálna definícia:

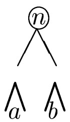
$$
\begin{aligned}
&Qsplit(p, 0) = 0, 0 \\
&Qsplit(p, x, y) = (x, v_1), v_2 \leftarrow x \leq p \wedge Qsplit(p, y) = v_1, v_2 \\
&Qsplit(p, x, y) = v_1, x, v_2 \leftarrow x > p \wedge Qsplit(p, y) = v_1, v_2 \ .
\end{aligned}
$$

Celé triedenie vyzerá nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&Qsort(0) = 0 \\
&Qsort(x, y) = Qsort(v_1) \oplus (x, Qsort(v_2)) \leftarrow Qsort(x, y) = v_1, v_2 \ .
\end{aligned}
$$

Kapitola 11

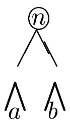
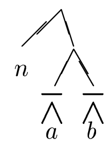
Binárne stromy

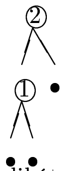
Zoznámime sa ďalšou dátovou štruktúrou - binárnymi stromami. Pod binárnym stromom budeme schematicky rozumieť nasledovnú štruktúru:  , kde ⓝ je vrchol(koreň) s hodnotou $n \in \mathbb{N}$ a $\bigwedge_a$ je ľavý binárny podstrom, $\bigwedge_b$ je pravý binárny podstrom. Prázdny binárny strom môžeme značiť ako $\bullet$.

11.1 Kódovanie binárnych stromov

Otázka znie, ako budeme kódovať binárne stromy do prirodzenách čísel?

11.1.1 1.spôsob.

Prvý jednoduchý spôsob, ktorý nás ihned napadne, je nasledovný. Prázdny binárny strom $\bullet$ zakódujeme 0 a binárny strom tvaru  budeme kódovať pomocou trojice:  $= n, \overline{\bigwedge_a}, \overline{\bigwedge_b}$, kde $\overline{\bigwedge_a}$, $\overline{\bigwedge_b}$ sú kódypre binárne podstromy $\bigwedge_a$, $\bigwedge_b$.

Napríklad: binárny strom  zakódujeme do $2,(1,0,0),0 = 382$.

Môžeme si zadefinovať predikát byť binárnym stromom:

$Bt(0)$
$Bt(n,a,b) \leftarrow N(n) \wedge Bt(a) \wedge Bt(b)$.

Ďalej si skúsme funkciu *Size*, ktorá nám zistí počet vnútorných vrcholov binárneho stromu t:

$$Size(0) = 0$$
$$Size(n,a,b) = Size(a) + Size(b) + 1$$

alebo predikát $Memb(x,t)$, ktorý platí ak v t sa nachádza vrchol s hodnotou x:

$Memb(x,y,a,b) \leftarrow x = y$
$Memb(x,y,a,b) \leftarrow x \neq y \wedge Memb(x,a)$
$Memn(x,y,a,b) \leftarrow x \neq y \wedge \neg Memb(x,a) \wedge Memb(x,b)$.

11.1.2 2.spôsob. Druhý spôsob kódovania binárnych stromov je o niečo zložitejší, ale na druhej strane všeobecnejší. Vo funkcionálnom programovaní sa používajú typové (aj rekurzívne) rovnice na špecifikáciu nejakého typu. Napríklad typ *výraz- expression* môžeme definovať nasledovne.
Expression je buď:

1. konštanta $\in C(N)$
2. premenná $\in V(N)$
3. $Add(exp_1, exp_2)$
4. $Mul(exp_1, exp_2)$

a zapíšeme pomocou typovej rovnice

$$Exp = C(\mathbb{N})|V(\mathbb{N})|Add(Exp, Exp)|Mul(Exp, Exp) \ ,$$

kde položky oddelené zvislou čiarou nazývame varianty a C, V, Add, Mul voláme *tagy* (označenia, nálepky, značky), pre konštruktory (funkcie).
Náš typ binárny strom môžeme definovať nasledovne.
Binárny strom je buď:

1. prázdny strom, značme ako E
2. tvaru $Nd(N, t_1, t_2)$,

a zapísať pomocou typovej rovnice:

$$Bt = E|Nd(N, Bt, Bt) \ .$$

Význam typových rovníc môžeme definovať algebraicky:

1. *Exp* je najmenšia množina, ktorá spĺňa:

$$C(n) = \{C(i)|i \in \mathbb{N}\} \subseteq Exp$$
$$V(n) = \{V(i)|i \in \mathbb{N}\} \subseteq Exp$$
$$exp_1, exp_2 \in Exp \rightarrow Add(exp_1, exp_2) \in Exp$$
$$exp_1, exp_2 \in Exp \rightarrow Mul(exp_1, exp_2) \in Exp \ .$$

Dá sa ukázať, že takto je *Exp* definovaná jednoznačne: Nech Exp_1, Exp_2 sú dve také množiny, ktoré spĺňajú vyššie uvedené podmienky, potom $Exp_1 \subseteq Exp_2$ (Exp_1 je najmenšia taká) a $Exp_1 \supseteq Exp_2$ (Exp_2 je najmenšia taká), čiže $Exp_1 = Exp_2$. Podobne pre typ Bt.

2. Bt je najmenšia množina, ktorá spĺňa:

$$E \in Bt$$
$$t_1, t_2 \in Bt \wedge n \in \mathbb{N} \rightarrow Nd(n, t_1, t_2) \in Bt \ .$$

Náš druhý spôsob kódovania binárnych stromov bude teda vychádzať z typových rovníc. Všimnime si, že každý variant z typovej rovnici začína nejakým *tagom*-značkou, nálepkou pre konštruktor

- v prvom prípade C, V, Add, Mul;
- v drhom prípade E, Nd; pričom za tagom môže byť ďalšie parametre, vtedy ide o tag pre konštruktor - funkcie (Nd), alebo nemusia, vtedy ide o tag pre konštruktor- konštantu (E).

V Cl budeme konštruktory- konštanty definovať kódovať ako pár

$$Const = t, 0 \quad (0,0;1,0;2,0;3,0\ldots)$$

a konštruktory- funkcie ako pár

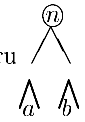
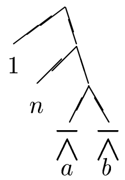
$$F(x) = t, x \quad (0,x;1,x;2,x;3,x\ldots) \ ,$$

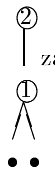
kde $t \in \mathbb{N}$ bude vlastne tag pre daný konštruktor. (Definície sú farebne odlíšne, $Const, F$ sú zelené.) Pre náš prvý prípad by sme mohli zadefinovať konštruktory:

$$C(x) = 0, x \qquad Add(x) = 2, x$$
$$V(X) = 1, x \qquad Mul(x) = 3, x$$

$(0,1,2,3$ - sú ich tagy).
Pre binárne stromy použijeme:

- konštruktor - konštantu $E = 0, 0$ (pre prázdny strom) a
- konštruktor - funkciu $Nd = 1, x$.

Výsledné kódovanie bude vyzerať nasledovne: Prázdny binárny strom • zakódujeme pomocou konštruktora- konštanty $E = 0, 0 = \underset{0\ 0}{\bigwedge}$. Binárny strom tvaru  zakódujem ako $Nd(n, \overline{\bigwedge_a}, \overline{\bigwedge_b}) =$  , kde $\overline{\bigwedge_a}$, $\overline{\bigwedge_b}$ sú kódy pre bin. podstromy $\bigwedge_a$, $\bigwedge_b$.

Napríklad: binárny strom  zakódujeme ako

$$Nd(2, Nd(1, E, E), E) = 1, 2, (1, (0, 0), 0, 0), 0, 0 = 1855045 .$$

Môžeme si zadefinovať predikát byť binárnym stromom:

$Bt(E)$
$Bt(Nd(n, a, b)) \leftarrow N(n) \wedge Bt(a) \wedge Bt(b)$.

Malá poznámka ku formátom: Okrem formátov kartézsky súčin a zoznamová schéma môžeme používať definovať predikáty- formáty s konštruktormi. Jeden z príkladov takých formátov je definícia Bt (Bt bude vysvietení žltou). Zobrazovací efekt bude taký, že výsledný tvar termu sa zobrazí pomocou konštruktorov. Napríklad:

```
1,2,(1,(0,0),0,0),0,0=x:Bt
x=Nd(2,Nd(1,E,E),E)
1855045=x:Bt
x=Nd(2,Nd(1,E,E),E)
```

11.2 Funkcie a predikáty na binárnych stromoch

Poďme si teraz zadefinovať nejaké ďalšie predikáty a funkcie na binárnych stromoch

11.2.1 Member. Matematicky:

$$Size(E) = 0$$
$$Size(Nd(n, l, r)) = Size(l) + Size(r) + 1 .$$

Kaluzálne:

$Memb(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x = y$
$Memb(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x \neq y \wedge Memb(x, l)$
$Memb(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x \neq y \wedge \neg Memb(x, l) \wedge Memb(x, r)$.

11.2.2 Inorder. Ďalej si zadefinujeme funkciu, ktorá nám vráti pre daný binárny strom zoznam vnútorných vrcholov v inorderovom usporiadaní:

$$Inorder(E) = 0$$
$$Inorder(Nd(x, l, r)) = Inorder(l) \oplus (x, Inorder(r)) .$$

11.2.3 Update. Funkcia $Update(x, y, t)$ vrátí strom t', ktorý vznikne z t nahradením u všetkých vrcholov x s hodnotou y.

$Update(x, y, E) = E$
$Update(x, y, Nd(z, l, r)) = Nd(y, Update(x, y, l), Update(x, y, r)) \leftarrow z = x$
$Update(x, y, Nd(z, l, r)) = Nd(z, Update(x, y, l), Update(x, y, r)) \leftarrow z \neq x$.

11.3 Binárne vyhladávacie stromy

Binárne vyhľadávacie stromy budú špeciálnym podtypom binárnych stromov. Matematicky ich môžeme definovať (pomocou $Memb$) takto:

$$Bst(E)$$
$$Bst(Nd(x, l, r)) \leftrightarrow N(x) \wedge \forall z(Memb(z, l) \to z < x) \wedge$$
$$\forall z(Memb(z, r) \to z > x) \wedge Bst(l) \wedge Bst(r) .$$

Na klauzálnu definíciu budeme potrebovať dva pomocné predikáty $Less(t, z)$, ktorá platí ak každá hodnota v binárnom strome t je menšia ako z, a $Grater(t, z)$, ktorý platí ak každá hodnota v binárnom strome t je väčšia ako z.
Matematicky:

$$Bt(t) \to Less(t, z) \leftrightarrow \forall v(Memb(v, t) \to v < z)$$
$$Bt(t) \to Greater(t, z) \leftrightarrow \forall v(Memb(v, t) \to v > z) .$$

Klauzálne:

$Less(E, z)$
$Less(Nd(x, l, r), z) \leftarrow x < z \wedge Less(l, z) \wedge Less(r, z)$

$Greater(E, z)$
$Greater(Nd(x, l, r), z) \leftarrow x > z \wedge Greater(l, z) \wedge Greater(r, z)$.

Celá definícia vyzerá takto:

$Bst(E)$
$Bst(Nd(x, l, r)) \leftarrow N(x) \wedge Less(l, x) \wedge Greater(r, x) \wedge Bst(l) \wedge Bst(r)$.

11.3.1 Member. Zadefinujme si predikát $Member(x, t)$, pre ktorý platí:

$$Bst(t) \rightarrow Member(x, t) \leftrightarrow Memb(x, t) .$$

Klauzálne:

$Member(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x = y$
$Member(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x > y \wedge Member(x, r)$
$Member(x, Nd(y, l, r)) \leftarrow x < y \wedge Member(x, l)$.

11.3.2 Insert. Ďalej si zadefinujeme funkciu $Insert(x, t)$, ktorá vloží do binárneho vyhladávacieho stromu vrchol s hodnotout x, tak aby výsledný strom ostal binárnym stromom.
Matematicky:

$$Bst(t) \rightarrow Bst(Insert(x, t))$$
$$Bst(t) \rightarrow Member(z, Insert(x, t)) \leftrightarrow z = x \vee Member(z, t) .$$

Klauzálne:

$Insert(x, E) = Nd(x, E, E)$
$Insert(x, Nd(y, l, z)) = Nd(y, l, r) \leftarrow x = y$
$Insert(x, Nd(y, l, z)) = Nd(y, Insert(x, l), r) \leftarrow x < y$
$Insert(x, Nd(y, l, z)) = Nd(y, l, Insert(x, r)) \leftarrow x > y$.

11.3.3 Delete. Nakoniec si zadefinujme funkciu $Delete(x, t)$, ktorá vymaže vrchol s hodnotou x z t:
Matematicky:

$$Bst(t) \rightarrow Bst(Delete(x, t))$$
$$Bst(t) \rightarrow Members(z, Delete(x, t)) \leftrightarrow z \neq x \wedge Member(z, t).$$

Pre klauzálnu definíciu potrebujeme dve pomocné funkcie; ktoré nám pre dvojicu l, r bin. vyhl. stromov nájdu najväčší prvok x z l a vytvoria binárny vyhladávací strom l_1 bez najväčšieho prvku x a napokon skonštruujú binárny vyhladávací strom $Nd(x, l_1, r)$.

$Join(l, r) = r \leftarrow l = E$
$Join(l, r) = Nd(x, l_1, r) \leftarrow l \neq E \wedge Split(l) = x, l_1$
$Split(Nd(x, l, r)) = x, l \leftarrow r = E$
$Split(Nd(x, l, r)) = x_1, Nd(x, l, r_1) \leftarrow r \neq E \wedge Split(r) = x_1, r_1$.

Celá definícia $Delete(x, t)$ vyzerá nasledovne:

$Delete(x, E) = E$
$Delete(x, Nd(y, l, r)) = Join(l, r) \leftarrow x = y$
$Delete(x, Nd(y, l, r)) = Nd(y, Delete(x, l), r) \leftarrow x < y$
$Delete(x, Nd(y, l, r)) = Nd(y, l, Delete(x, r)) \leftarrow x > y$.

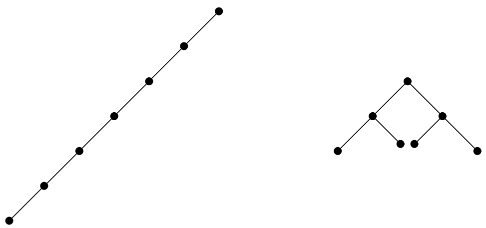
Matematicky:

$$Bst(l) \wedge Bst(r) \rightarrow Bst(Join(l, r))$$
$$Bst(l) \wedge Bst(r) \rightarrow Member(z, Join(l, r)) \leftrightarrow Member(z, l) \vee Member(z, r) .$$

Kapitola 12

Perfektne vyvážené stromy

Binárne stromy predstavujú dôležitý nástroj na implementáciu mnohých rozšírených dátových typov, napríklad: množín, frônt, atď.. Nad týmito typmi vykonávame hlavne operácie, ktoré by sme mohli zhruba charakerizovať ako: pridanie prvku, $Insert(p, t)$, odobratie prvku, $Delete(p, t)$, a vyhľadanie prvku, $Lookup(p, t)$. Našou snahou je, aby uvedené operácie boli vykonávané čo najefektívnejšie. Keď sa pozrieme bližšie na realizáciu týchto operácií nad binárnymi vyhľadávacími stromami, tak ľahko zistíme, že zložitosť, počet krokov, ktoré musíme vykonať, keď pridávame, vyberáme alebo vyhľadávame nijaký prvok, odpovedá výške binárneho vyhľadávacieho stromu. Čiže našou snahou bude udržiavať binárny strom čo najmešou výškou pri čo najväčšom počte vrcholov. Kedy nám môžu vznikať patologické prípady - stromy s veľkou výškou a malým počtom vrcholov ? Pri pohľade na obrázok 12.1, ktorý predstavuje takýto



vyska = 6 | vyska = 2

pocet vrcholov = 7 | pocet vrcholov = 7

Obrázok 12.1: Stromy

strom, ľahko usúdime, že ak budeme nevyvážene pridávať nové vrcholy iba do jedného podstromu (v našom prípade ľavého podstromu) a počet vrcholov v jednom podstrome bude veľmi rozdielny, tak sa dopracujeme k stromu s veľkou výškou a malým počtom vrcholov - štíhlemu stromu. Naším idealom bude malý "bucľaty" strom, kde všetky vrcholy nebudú mať ďaleko od koreňa a ich počet

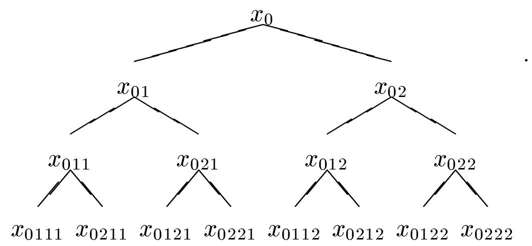
bude čo najväčší. To dosiahneme tým, že nedopustíme aby jeden podstrom mal omnoho viac vrcholov ako druhý (lebo tým na rýchlo narastie výška stromu), čiže budeme nové vrcholy pridávať do ľavého a pravého podstromu vyvážene, aby počet vrcholov ľavého podstromu sa rovanal počtu vrcholov pravého podstromu, poťažme bol o jeden väčší. Túto podmienku ďalej budeme uplatnovať aj na podstromy ľavého a pravého podstromu. Touto úvahou sme sa prepracovali až k matematickej definícii binárneho perfektne vyváženého stromu:

$$Pbt(E)$$
$$Pbt(Nd(x,l,r)) \leftrightarrow N(x) \wedge (Size(l) = Size(r) \vee Size(l) = Size(r) + 1) \wedge$$
$$Pbt(l) \wedge Pbt(r)$$

Klauzálne:

$Pbt(E)$
$Pbt(Nd(x,l,r)) \leftarrow Size(l) = Size(r) \wedge Pbt(l) \wedge Pbt(r)$
$Pbt(Nd(x,l,r)) \leftarrow Size(l) \neq Size(r) \wedge Size(l) = Size(r) + 1 \wedge Pbt(l) \wedge Pbt(r)$.

Je zrejmé, že $Pbt(t) \rightarrow Bt(t)$, binárne perfektne vyvážený strom je aj binárnym stromom. Ďalšia otázka, ktorú musíme zodpovedať, je ako budeme indexovať prvky v takto perfektne vyváženom strome. Čiže ak máme n prvkov $x_0, \ldots, x_{n-1}$, tak akým spôsobom ich uložíme do stromu. Jednoduché a veľmi elegantné riešenie nám ponúka diadická sústava. Predstavme si indexy $0, \ldots, n-1$ zapísané v diadickej sústave. Môžeme ich rozdeliť do troch skupín. Prvá skupina bude obsahovať iba 0. Druhá skupina bude tvorená tými indexami, ktorých statický zápis sa končí 1 a tretia tými, ktorých diadický zápis sa končí 2. Ľahko vidno, že v druhej skupine je rovnaký alebo o jeden väčší počet indexov ako v tretej skupine (v diadických zápisoch čísel $1, \ldots, n-1$ sa nám na poslednom mieste strieda 1 a 2, pričom sa začína 1; $0_{\bar{1}}, 0_{\bar{2}}, 0_{1\bar{1}}, 0_{1\bar{2}}, 0_{2\bar{1}}, \ldots$). Perfektne vyvážený strom budeme vytvárať tak, že prvok x_0 dáme do koreňa, prvky s inedxami z prvej skupiny pôjdu do ľavého podstromu a prvky s indexami s druhej skupiny zase do pravého podstromu, čiže vyváženosť bude platiť v ľavom podstrome bude rovnaký alebo o jeden väčší počet vrcholov ako v pravom podstrome. Uvedenú metódu ďalej uplatníme na podstromy. Druhú triedu indexov končiacich na 1 opäť rozdelíme na tri podskupiny podľa toho či na predposlednom mieste v diadickom je $0, 1$ alebo 2. Prvok s indexom z prvej podskupiny pôjde do vrchola ľavého podstromu. Prvky s indexami z druhej podskupiny zase do ľavého podstromu ľavého podstromu a z tretej podskupiny zase do pravého podstromu ľavého podstromu. Opäť v diadických zápisoch indexom z druhej skupiny okrem indexu 0_1 (z prvej podskupiny) sa na predposlednom mieste bude striedať 1 a 2, pričom začína sa 1: $0_{\bar{1}1}, 0_{\bar{2}1}, 0_{1\bar{1}1}, 0_{1\bar{2}1} \ldots$, čiže v druhej podskupine bude rovnaký alebo o jeden väčší počet inedxov ako v tretej podskupine a taktiež ostane zachovaná vyváženosť pre ľavý a pravý podstrom ľavého podstromu. Analogicky postupujeme pre pravý podstrom, tretiu skupinu indexov končiacich sa na 2, rozdelíme ju opäť na tri podskupiny indexov, podľa toho či na predposlednom mieste ich diadických zápisov je $0, 1$ alebo 2 a sformujeme kus pravého podstromu. Takto vygenerujeme celý perfektne vyvážený strom pre prvky $x_0, \dots, x_{n-1}$. Metódu si ilustrujeme nasledovným príkladom. Perfektne vyvážený strom pre prvky $x_0, \dots, x_{14} = 0_{222}$ vyzerá asledovne:



Pri generovaní stromu môžeme využiť nasledovný vzťah: ak máme "otca" $x_{0\alpha}$ tak potom jeho ľavý "syn" bude $x_{01\alpha}$ a pravý "syn" bude $x_{02\alpha}$; ktorý priamo vyplýva z navrhnutej metódy: skutčne skupina indexov končiacich sa na reťazec α sa rozpadne do troch podskupín: $\{\alpha\}$, podskupiny 1α a podskupiny 2α. $0_{1\alpha}$ bude prvý prvok skupiny 1α a člen prvej podskupiny 1α a $0_{2\alpha}$ bude prvý prvok skupiny 2α a člen prvej podskupiny 2α a. Uvedenú metodu môžeme sformalizovať do klauzálnej definície, ktorá nám zo zoznamu prvkov $x_0, \dots, x_{n-1}$ vytvorí prefektne vyvážený strom.

$Ln2pbt(0) = E$
$Ln2pbt(x, y) = Nd(x, Ln2pbt(y_1), Ln2pbt(y_2)) \leftarrow Split(y) = y_1, y_2$
$Split(0, 0) = 0$
$Split(x, 0) = (x, 0), 0$
$Split(x_1, x_2, z) = (z_1, z_1), x_2, z_2 \leftarrow Split = z_1, z_2$

12.0.4 Lookup.

Z uvedenej metódy ľahko vyčítame ako najdme prvok x_i v strome. Ak $i = 0$ tak x_0 je priamo hodnota koreňa. Ak $i = i'1$ tak hľadáme v ľavom podstrome prvok $x_{i'}$. Ak $i = i'2$ tak hľadáme v pravom podstrome prvok $x_{i'}$. Môžeme si zapísať klauzálnu definíciu:

$Lookup(Nd(x, l, r), 0) = x$
$Lookup(Nd(x, l, r), i_1) = Lookup(l, i)$
$Lookup(Nd(x, l, r), i_2) = Lookup(r, i)$.

12.0.5 Pbt2ln.

Vytvorme si funkciu, ktorá nám zo stromu t s prvkami $x_0, \dots, x_{n-1}$ vytvorí zoznam s $x_0, \dots, x_{n-1}$. Jej matematická charaktirizácia je

$$\begin{aligned} Pbt \rightarrow & L(Pbt2ln(t)) = Size(t) \land \\ & \forall i(i < Size(t) \rightarrow Take(Pbt2ln(t), i) = Lookup(t, i)) \ . \end{aligned}$$

Klauzálna definicia:

$Pbt2ln(E) = 0$
$Pbt2ln(Nd(x, l, r)) = x, Zip(Pbt2ln(l), Pbt2ln(r))$
$Zip(0, 0) = 0$
$Zip((x, 0), 0) = x, 0$
$Zip((x, x_s), y, y_s) = x, y, Zip(x_s, y_s)$.

12.0.6 Update.

Ďalej si môžeme zadefinovať funkciu, ktorá nám prepíše v danom strome t prvok s indexom i hodnotou y. $Update(t, i, y)$ funkcia spĺňa nasledovnú špecifikáciu:

$$\begin{aligned} Pbt \land i < Size(t) \rightarrow & Pbt(Update(t, i, y)) \land \\ & Size(Update(t, i, y)) = Size(t) \land \\ & Lookup(Update(t, i, y), i) = y \land \\ & \forall j(j < Size(t) \land j \neq i \rightarrow \\ & Lookup(Update(t, i, y), y) = Lookup(t, y)) \ . \end{aligned}$$

Klauzálne:

$Update(Nd(x, l, r), 0, y) = Nd(y, l, r)$
$Update(Nd(x, l, r), i_1, y) = Nd(x, Update(l, i, y), r)$
$Update(Nd(x, l, r), i_2, y) = Nd(y, l, Update(r, i, y))$.

12.0.7 Inslast.

Teraz si zadefinujme funkciu $Inslast(t, n, x)$, ktorá nám vloží x ako prvok s indexom n do stromu t o velkosti n (teda s prvkami $x_0, \dots, x_{n-1}$. Funkcia má nasledovnú špecifikáciu:

$$\begin{aligned} Pbt(t) \land Size(t) = n \rightarrow & Pbt(Inslast(t, n, x)) \land \\ & Size(Inslast(t, n, x)) = n + 1 \land \\ & Lookup(Inslast(t, n, x), n) = x \land \\ & \forall i(i < n \rightarrow Lookup(Inslast(t, n, x), i) = Lookup(t, i)) \ . \end{aligned}$$

Klauzálne:

$Inslast(E, 0, x) = Nd(x, E, E)$
$Inslast(Nd(y, l, r), n_1, x) = Nd(y, Inslast(l, n, x), r)$
$Inslast(Nd(y, l, r), n_2, x) = Nd(y, l, Inslast(l, n, x), r)$.

12.0.8 Dellast.

Zadefinujme si inverznú funkciu $Dellast(t, n)$, ktorá vymaže z t o velkosti $n + 1$ prvok x_n:

$$\begin{aligned} Pbt(t) \land Size(t) = n + 1 \rightarrow & Pbt(Dellast(t, n)) \land Size(Dellast(t, n)) = n \land \\ & \forall i(i < n \rightarrow Lookup(Dellast(t, n), i) = Lookup(t, i) \ . \end{aligned}$$

Klauzálne:

$Dellast(Nd(x, l, r), 0) = E$
$Dellast(Nd(x, l, r), n_1) = Nd(x, Dellast(l, n), r)$
$Dellast(Nd(x, l, r), n_2) = Nd(x, l, Dellast(l, n))$.

12.0.9 Insfirst.

Teraz si skúsime zadefinovať funkciu $Insfirst(t, x)$, ktorá nám do stromu t vloží x ako prvok s indexom 0 a ostatné prvky s indexom

$0 \leq i < \mathit{Size}(t)$ uloží na miesta $0 < i+1 < \mathit{Size}(t)+1$. Matematická definícia:

$$\begin{aligned} \mathit{Pbt}(t) \rightarrow & \mathit{Pbt}(\mathit{Insfirst}(t,x)) \wedge \\ & \mathit{Pbt2ln}(\mathit{Insfirst}(t,x) = x, \mathit{Pbt2ln}(t)\ . \end{aligned}$$

Klauzálna definícia:

$\mathit{Insfirst}(E,x) = \mathit{Nd}(x,E,E)$
$\mathit{Insfirst}(\mathit{Nd}(y,l,r),x) = \mathit{Nd}(x,\mathit{Insfirst}(r,y),l)\ .$

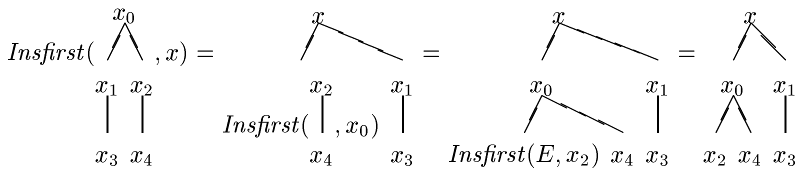
12.0.10 Delfirst. Nakoniec si zadefinujme funkciu $\mathit{Delfirst}(t)$ pre neprázdne t, ktorá vymaže prvok x_0 a ostatné prvky s indexom $0 < i < \mathit{Size}(t)$ uloží na miesta s indexom $0 \leq i-1 < \mathit{Size}(t)-1$. Čiže:

$$\begin{aligned} \mathit{Pbt}(t) \wedge \mathit{Size}(t) > 0 \rightarrow & \mathit{Pbt}(\mathit{Delfirst}(t)) \wedge \\ & \exists x(\mathit{Pbt2ln}(t) = x, \mathit{Pbt2ln}(\mathit{Delfirst}(t)))\ . \end{aligned}$$

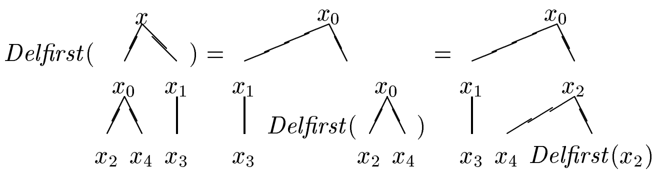
$\mathit{Delfirst}(\mathit{Nd}(x,l,r)) = E \leftarrow l = E$
$\mathit{Delfirst}(\mathit{Nd}(x,l,r)) = \mathit{Nd}(y,r,\mathit{Delfirst}(l)) \leftarrow l = \mathit{Nd}(y,l_1,r_1)$

12.1 Príklady

12.1.1 Insfirst. $x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 \rightarrow x,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4$



12.1.2 Delfirst. $x,x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 \rightarrow x_0,x_1,x_2,x_3,x_4$



Kapitola 13

Aritmetické výrazy

Teraz sa budeme zaoberať ďalším dátovým typom, aritmetickými výrazmi. Ukážeme si ako sa dá tento typ zakódovať pomocou konštruktorov do prirodzených čísel, zadefinujme si funkciu Den, ktorá nám vypočíta hodnotu aritmetického výrazu, funkciu $Comp$, ktorá pretransformuje výraz do zoznamu inštrukcií-programu pre zásobníkový automat a nakoniec navrhneme funkciu Run, ktorá bude simulovať zásobníkový automat pre daný program. Ak program vznikol pomocou funkcie $Comp$ aplikovanej na nijaký výraz e, tak $Eval$ spustená na tento program nám vráti hodnotu výrazu e. Presnejšie, budeme uvažovať aritmetické výrazy, ktoré obsahujú $+, *$, číselné konštanty a premenné tvaru Vn.

konštantu číslo n zakódujeme ako $Ct(n)$

premennú Vn zakódujeme ako $Vt(n)$

výraz $e_1 + e_2$ zakódujeme ako $At(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

výraz $e_1 * e_2$ zakódujeme ako $Mt(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$

Aritmetický výraz môžeme formálne špecifikovať pomocou nasledujúcej typovej rovnice:

$$\mathit{Exp} = Ct(\mathbb{N})|At(\mathit{Exp},\mathit{Exp})|Mt(\mathit{Exp},\mathit{Exp}|\,Vt(\mathbb{N})$$

Do prirodzených čísel budeme tento typ kódovať nasledovne.

- budeme mať *konštruktory*:

$$\begin{aligned} Ct(x) &= 0,x \\ At(x) &= 1,x \\ Mt(x) &= 2,x \\ Vt(x) &= 3,x\ , \end{aligned}$$

- a *predikát- formát Exp*:

$Exp(Ct(n))$
$Exp(Vt(n))$
$Exp(At(e_1, e_2)) \leftarrow Exp(e_1) \wedge Exp(e_2)$
$Exp(Mt(e_1, e_2)) \leftarrow Exp(e_1) \wedge Exp(e_2)$.

Napríklad výraz: $2 + (3 * V4)$ zakódujeme ako

$$At(At(2), Mt(At(3), Vt(4))) = 1, (0, 2), 2, (0, 3), 3, 4 = 1184358093.$$

Hodnotu výrazu z premenných vypočítame jednoducho pomocou funkcie Den:

$Den(Ct(n)) = n$
$Den(At(e_1, e_2)) = Den(e_1) + Den(e_2)$
$Den(At(e_1, e_2)) = Den(e_1) + Den(e_2)$

Ak chceme zistiť, hodnotu výrazu s premennými v tvare $V0, V1, \ldots, Vn, \ldots$, budeme k tomu potrebovať zoznam hodnôt, ktoré chceme dosadiť za premenné. Budeme ho nazývať prostredie. Nech env je takéto prostredie, tak potom $Take(env, n)$ bude predstavovať hodnotu pre premennú Vn. Všimnime si, že ak dĺžka $env \leq n$ a chcem zistiť hodnotu pre premennú Vn, tak $Take(env, n) = 0$. Takto sú dodefinovaný všetky premenné tvaru $Vn; n \in \mathbb{N}$. Na základe tohoto môžeme zovšeobecniť funkciu Den na výraz s premnnými: $Den(t, env)$ nám vráti hodnotu výrazu t v prostredí env:

$Den(Ct(n), env) = n$
$Den(Vt(n), env) = Take(env, n)$
$Den(At(e_1, e_2), env) = Den(e_1, env) + Den(e_2, env)$
$Den(Mt(e_1, e_2), env) = Den(e_1, env) * Den(e_2, env)$

kde

$Take((x_1, x_2), 0) = x_1$
$Take((x_1, x_2), n + 1) = Take(x_2, n)$

13.1 Zásobníkový automat

Teraz si povieme niečo o zásobníkovom automate. Zásobníkový automat je zariadenie, ktoré sa skladá z "pásky", ktorá obsahuje program- zoznam inštrukcií, z "pásky"- prostredia, zoznam hodnôt pre premenné zásobníka, zásobníka LIFO pre premenné a z dvoch čítacích hláv, ktoré sú nastavené nad najakými poličkami pások. Automat si prečíta a vykoná inštrukciu v políčku pod hlavou programovej pásky, ktorá vykoná nejaké čítania a zmeny na zásobníku a čítania v prostredí, potom posunie programovú hlavu o jedno políčko doprava. Keď dočíta a vykoná všetky inštrukcie na programovej páske, presunie sa až na pravý okraj pásky, zastaví sa a vráti hodnotu, ktorá je uložená na vrchole (top) zásobníka. Na začiatku je programová hlava nastavená nad najlavejším políčkom pásky, hlava pre prostredie môže byť hocikde a zásobník je prázdny.

My si teraz zadefinujeme funkciu Ren, ktorá bude simulovať prácu takéhoto zásobníkového automatu pre nejaký program, prostredie. Budeme predpokladať, že náš automat vykonáva inštrukcie nasledovného typu:

$Cx(n)$ ulož na vrchol zásobníka číslo n,

$Vx(n)$ ulož na vrchol zásoníka hodnotu n-tého ľavého políčka (od nuly) z prostredia

Ax zober a vymaž dve vrchné políčka zo zásobníka a ulož na vrchol zásobníka ich súčet

Mx zober a vymaž dve vrchné políčka zo zásobníka a ulož na vrchol zásobníka ich súčin.

Zásobník budeme kódovať pomocou zoznamu. Vrchol zásobníka bude prvý prvok zoznamu. Keďže hlava sa posúva zľava doprava po programovej páske a v tomto poradí sa vykonávajú aj inštrukcie. Môžeme programovú pásku a hlavu simulovať tiež pomocou zoznamu, pričom jeho prvý prvok bude predstavovať to políčko nad ktorým je čítacia hlava. Keď sa hlava po vykonaní inštrukcie posunie doprava, zoznam skrátime o prvý prvok- zoberieme zvyšok zoznamu. Môžeme si to dovoliť, lebo hlava sa pohybuje vždy iba doprava a na opustené políčko sa už nikdy nevráti, preto ho zahadzujeme. Pásku- prostredie budeme tiež simulovať pomocou zoznamu.
Inštrukcie budeme kódovať pomocou konštruktorov:

$$\begin{aligned} Cx(x) &= 0, x \\ Ax &= 1, 0 \\ Mx &= 2, 0 \\ Vx(x) &= 3, x \ . \end{aligned}$$

Môžeme si zadefinovať predikát $Instruction$, ktorý platí keď:

$$\begin{aligned} &Inst(Cx(n)) \\ &Inst(Vx(n)) \\ &Inst(Ax) \\ &Inst(Mx) \ . \end{aligned}$$

A taktiež predikát- formát program- zoznam inštrukcií:

$Program(0)$
$Program(i, p) \leftarrow Inst(i) \wedge Program(p)$.

Celá simulácia bude vyzerať nasledovne:
$Run(p, env, stack$ má tri argumenty:

p p je programová páska ,

env je prostredie a

$stack$ je zásobník.

$Run(0, env, k, s) = k$
$Run((Cx(n), p), env, s) = Run(p, env, n, s)$
$Run((Vx(n), p), env, s) = Run(p, env, Take(env, n), s)$
$Run((Ax(n), p), env, s_1, s_2, s) = Run(p, env, s_1 + s_2, s)$
$Run((Mx(n), p), env, s_1, s_2, s) = Run(p, env, s_1 * s_2, s)$

Našou ďalšou úlohou bude definovať funkciu $Comp$- kompilátor, ktorá aritmetický výraz e preloží do programu, tak aby zásobníkový automat po vykonaní programu v prostredí env vrátil hodnotu výrazu e- v env $Den(e, env)$. Matematicky:

$$Exp(e) \to Eval(Comp(e), env) = Den(e, env) \ ,$$

kde

$$Eval(p, env) = Run(p, env, 0) \ .$$

13.1.1 Kompilácia. Kompilácia bude vyzerať nasledovne. Funkciu $Comp$ navrhneme tak, aby nám platilo, že

$$Exp(e) \to Run(Comp(e) \oplus p, env, s) = Run(p, env, Den(e, env, s) \qquad (1)$$

potom, pre $p = 0, s = 0$ dostaneme, že

$$\begin{aligned} Exp(e) \to Eval(Comp(e), env) &\stackrel{\text{def}}{=} Run(Comp(e) \oplus 0, env, 0) \\ &= Run(0, env, Den(e, env), s) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} Den(e, env) \end{aligned}$$

z čoho už vyplýva naše tvrdenie-špecifikácia. Funkcia $Comp(e)$ bude nasledovná:

$Comp(Ct(n)) = Cx(n), 0$
$Comp(Vt(n)) = Vx(n), 0$
$Comp(At(e_1, e_2)) = Comp(e_1) \oplus Comp(e_2) \oplus (Ax, 0)$
$Comp(Mt(e_1, e_2)) = Comp(e_1) \oplus Comp(e_2) \oplus (Mx, 0)$

To, že vyhovuje (1) si môžeme dokázať indukciou na term e. Ak (1) bude platiť, pre ľubovolnú konštantu $Ct(n)$ a ľubovoľnú premennú $Vt(n)$. A za predpokladu, že (1) platí pre ľubovolné e_1, e_2 vieme ukázať, že (1) platí aj pre $At(e_1, e_2)$, $Mt(e_1, e_2)$, tak potom bude (1) platiť pre ľubovolný výraz e, z čoho už vyplýva naša špecifikácia.

Nech $e = Ct(n)$:

$$\begin{aligned} Run(Comp(Ct(n)) \oplus p, env, s) &= Run(Cx(n), 0) \oplus p, env, s) \\ &= Run(Cx(n), p), env, s) \\ &= Run(p, env, n, s) \\ &= Run(p, env, Den(Ct(n), env), s) \ . \end{aligned}$$

Nech $e = Vt(n)$:

$$\begin{aligned} Run(Comp(Vt(n)) \oplus p, env, s) &= Run(Vx(n), p), env, s) \\ &= Run(p, env, Take(env, n), s) \\ &= Run(p, env, Den(Vt(n), env), s) \ . \end{aligned}$$

Nech $e = At(e_1, e_2)$ a pre e_1, e_2, už (1) platí:

$$\begin{aligned} Run(Comp(At(e_1, e_2)) \oplus p, env, s) &= Run(Comp(e_1) \oplus Comp(e_2) \oplus (Ax, 0) \oplus p, env, s) \\ &\stackrel{\text{IP pre } e_1}{=} Run(Comp(e_2) \oplus (Ax, 0) \oplus p, env, Den(e_1, env), s) \\ &\stackrel{\text{IP pre } e_2}{=} Run((Ax, p), env, Den(e_2, env), Den(e_1, env), s) \\ &= Run(p, env, Den(e_2, env) + Den(e_1, env), s) \\ &= Run(p, env, Den(At(e_1, e_2, env), s) \end{aligned}$$

Nech $e = Mt(e_1, e_2)$ a pre e_1, e_2, už (1) platí:

$$\begin{aligned} Run(Comp(Mt(e_1, e_2)) \oplus p, env, s) &= Run(Comp(e_1) \oplus Comp(e_2) \oplus (Mx, 0) \oplus p, env, s) \\ &\stackrel{\text{IP pre } e_1}{=} Run(Comp(e_2) \oplus (Mx, 0) \oplus p, env, Den(e_1, env), s) \\ &\stackrel{\text{IP pre } e_2}{=} Run((Mx, p), env, Den(e_2, env), Den(e_1, env), s) \\ &= Run(p, env, Den(e_2, env) * Den(e_1, env), s) \\ &= Run(p, env, Den(Mt(e_1, e_2, env), s) \end{aligned}$$

Takže (1) pre ľubovoľný výraz e platí a tým aj naša špecifikácia pre $Comp(e)$.