

1-AIN-470 Špecifikácia a verifikácia programov

Letný semester 2025/26

11. prednáška

Ján Komara

Obsah 11. prednášky

Čiastočne rekurzívne funkcie

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Aritmetizácia výpočtového modelu

Čiastočne rekurzívne funkcie

Čiastočné funkcie

n -árna čiastočná funkcia f je jednoznačná relácia z \mathbb{N}^n do \mathbb{N} :

$$(\vec{x}, y) \in f \wedge (\vec{x}, z) \in f \rightarrow y = z.$$

Čiastočné funkcie sú usporiadané množinovou reláciou $f \subseteq g$.

Silná rovnosť (Kleene)

$\tau \simeq \rho$ platí, ak jedna z nasledujúcich podmienok je splnená:

- ▶ Výrazy τ, ρ sú definované a ich hodnoty sú rovnaké.
- ▶ Výrazy τ, ρ nie sú definované.

Ak termy τ, ρ obsahujú len funkcie, potom $\tau \simeq \rho \leftrightarrow \tau = \rho$.

Označenie:

- ▶ $\tau \downarrow$, ak výraz τ je definovaný (má hodnotu, konverguje).
- ▶ $\tau \uparrow$, ak výraz τ nie je definovaný (nemá hodnotu, diverguje).

Čiastočne rekurzívne funkcie

Kleeneho prvá veta o rekurzii

Funkcionálna rovnica v neznámej f :

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

má najmenšie riešenie n -árnu čiastočnú funkciu $\bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$, ktorá je limitou reťazca f_0, f_1, f_2, \dots definovaného predpisom

$$f_0 = \emptyset^{(n)}$$

$$f_{i+1}(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f_i; x_1, \dots, x_n].$$

Poznámka

Toto je prvá časť prvej vety o rekurzii. V druhej časti sa tvrdí, že najmenšie riešenie je vypočítateľné.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne definície čiastočných funkcií

Sú to definície čiastočných funkcií v tvare

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Čiastočnou funkciou, ktorá je definovaná uvedeným vzťahom, rozumíme najmenšie riešenie tejto funkcionálnej rovnice v triede n -árnych čiastočných funkcií. Existencia takého riešenia plynie z prvej vety o rekurzii.

Poznámka

Regulárne rekurzívne definície do dobre založených relácií

$$f(x_1, \dots, x_n) = \tau[f; x_1, \dots, x_n]$$

sú špeciálnym prípadom rekurzívnych definícií čiastočných funkcií.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Výpočtový model

- ▶ Výpočet prebieha na monadických numeráloch: $\underline{x} \equiv \overbrace{S \dots S}^{x\text{-krát}}(0)$.
- ▶ Jeden krok výpočtu: $\rho \triangleright_1 \sigma$. Vyberáme najľavejší redex:

$$\begin{array}{ll} D(\underline{0}, \rho_2, \rho_3) \triangleright_1 \rho_3 & D(\underline{x+1}, \rho_2, \rho_3) \triangleright_1 \rho_2 \\ g_i(\underline{y_1}, \dots, \underline{y_{m_i}}) \triangleright_1 \underline{g_i(y_1, \dots, y_{m_i})} & \text{pre } i = 1, \dots, k \\ f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright_1 \tau[f; \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}]. & \end{array}$$

- ▶ Viac krokov výpočtu: $\rho \triangleright \sigma$.

Veta (Ekvivalentnosť výpočtovej a definičnej sémantiky)

Platí

$$f(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_n}) \triangleright \underline{y} \leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \simeq y.$$

Čiastočne rekurzívne funkcie

Definícia triedy čiastočne rekurzívnych funkcií

- ▶ Základné funkcie:
 - ▶ funkcia nasledovníka $S(x) = x + 1$,
 - ▶ funkcia predchodcu $P(x) = x \div 1$.
- ▶ Explicitné definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[x_1, \dots, x_n].$$

- ▶ Rekurzívne definície čiastočných funkcií:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Funkcia je rekurzívna, ak je to totálna čiastočne rekurzívna funkcia.
Predikát je rekurzívny, ak taká je jeho charakteristická funkcia.

Čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne odvodenia

Sčítanie

$$x + y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then } S(P(x) + y) \text{ else } y.$$

Odčítanie

$$x \dot{-} y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then if } y \neq 0 \text{ then } P(x) \dot{-} P(y) \text{ else } x \text{ else } 0.$$

Násobenie

$$x \cdot y \simeq \text{if } x \neq 0 \text{ then } P(x) \cdot y + y \text{ else } 0.$$

Umocňovanie

$$x^y \simeq \text{if } y \neq 0 \text{ then } x \cdot x^{P(y)} \text{ else } 1.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly (príklad)

Primitívne rekurzívna definícia

$$\begin{aligned}0 + y &= y \\ S(x) + y &= S(x + y).\end{aligned}$$

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \text{if } x \neq 0 \text{ then } S(P(x) + y) \text{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq D(x_1, S(P(x_1) + x_2), x_2).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.D(x_1, S f_2(P(x_1), x_2), x_2).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Rekurzívne termy a funkčné symboly

Induktívna definícia triedy rekurzívnych termov a triedy rekurzívnych funkčných symbolov:

- ▶ Premenné $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ a konštanta 0 sú rekurzívne termy.
- ▶ Ak τ_1, τ_2, τ_3 sú rekurzívne termy, potom aplikácia diskriminačnej funkcie $D(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ je rekurzívny term.
- ▶ Ak τ je rekurzívny term, potom aplikácie funkcie nasledovníka $S(\tau)$ a funkcie predchodcu $P(\tau)$ sú rekurzívne termy.
- ▶ Ak τ_1, \dots, τ_n sú rekurzívne termy, potom aplikácia n -árnej funkčnej premennej $f_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ je rekurzívny term.
- ▶ Ak ρ_1, \dots, ρ_n sú rekurzívne termy a τ je rekurzívny term v premenných x_1, \dots, x_n a funkčnej premennej f_n , potom aplikácia $(\lambda_n.\tau)(\rho_1, \dots, \rho_n)$ je rekurzívny term.

S, P a $\lambda_n.\tau$ sa nazývajú rekurzívne funkčné symboly.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Interpretácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Interpretáciu (denotáciu) definovaných rekurzívnych funkčných symbolov $\lambda_n.\tau$ definujeme indukciou na štruktúru rekurzívnych termov τ :

Nech $\tau[f_n; x_1, \dots, x_n]$ je rekurzívny term v premenných x_1, \dots, x_n a funkčnej premennej f_n . Predpokladajme ďalej, že rekurzívne funkčné symboly vyskytujúce sa vo výraze τ sú interpretované podľa indukčného predpokladu. Potom rekurzívny funkčný symbol $\lambda_n.\tau$ interpretujeme ako čiastočnú funkciu f definovanú vzťahom

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq \tau[f; x_1, \dots, x_n].$$

Interpretáciu rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ označujeme tým istým menom $\lambda_n.\tau$.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Veta

Čiastočná funkcia je rekurzívna práve vtedy, keď je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.

Dôkaz.

- ▶ Indukciou na dĺžku rekurzívneho odvodu dokážeme, že každá čiastočne rekurzívna funkcia je interpretáciou nejakého rekurzívneho funkčného symbolu.
- ▶ Indukciou na štruktúru rekurzívneho termu τ dokážeme, že interpretácia rekurzívneho funkčného symbolu $\lambda_n.\tau$ je čiastočne rekurzívna funkcia.

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Monadické numerály

Výpočet prebieha na monadických numeráloch:

$$0 \quad S(0) \quad SS(0) \quad SSS(0) \quad SSSS(0) \quad \dots$$

Označenie:

- ▶ Ak x je prirodzené číslo, potom \underline{x} je monadický numerál, ktorý denotuje číslo x :

$$\underline{x} \equiv \overbrace{S \dots S}^{x\text{-krát}}(0).$$

- ▶ Ak x_1, \dots, x_n sú prirodzené čísla, potom

$$\underline{x_1, \dots, x_n} \equiv \underline{x_1}, \dots, \underline{x_n} \equiv \overbrace{S \dots S}^{x_1\text{-krát}}(0), \dots, \overbrace{S \dots S}^{x_n\text{-krát}}(0).$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Jeden krok výpočtu

Ak uzavretý rekurzívny term τ nie je numerál, tak musí obsahovať aspoň jeden podvýraz (*redex*) v tvare

$$D(\underline{x}, \sigma_2, \sigma_3) \quad P(\underline{x}) \quad (\lambda_n.\sigma)(\vec{x}).$$

Jeden výpočtový krok spočíva v nájdení najľavejšieho redexu a jeho nahradením kontrakciou podľa nasledujúcich pravidiel

$$\begin{aligned} D(\underline{0}, \sigma_2, \sigma_3) &\triangleright_1 \sigma_3 \\ D(\underline{x + 1}, \sigma_2, \sigma_3) &\triangleright_1 \sigma_2 \\ P(\underline{x}) &\triangleright_1 \underline{x \div 1} \\ (\lambda_n.\sigma[f_n; \vec{x}])(\vec{x}) &\triangleright_1 \sigma[\lambda_n.\sigma; \vec{x}]. \end{aligned}$$

Tak dostaneme nový uzavretý rekurzívny term ρ a píšeme

$$\tau \triangleright_1 \rho.$$

Výpočtový model pre čiastočne rekurzívne funkcie

Viac krokov výpočtu

Označenie:

- ▶ $\tau_1 \triangleright_k \tau_2$, ak výraz τ_1 sa redukuje do výrazu τ_2 po k krokoch. To znamená, že existujú uzavreté rekurzívne termy $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k$ také, že

$$\tau_1 \equiv \rho_0 \triangleright_1 \rho_1 \triangleright_1 \dots \triangleright_1 \rho_k \equiv \tau_2.$$

Umožníme tiež prípad $k = 0$. Vtedy $\tau_1 \triangleright_0 \tau_2 \leftrightarrow \tau_1 \equiv \tau_2$.

- ▶ $\tau_1 \triangleright \tau_2$, ak $\tau_1 \triangleright_k \tau_2$ pre nejaké k .
- ▶ Ak $\tau \triangleright \underline{x}$, tak vravíme, že výpočet skončil s výsledkom x .

Veta (Ekvivalentnosť definičnej a výpočtovej sémantiky)

Pre každý rekurzívny funkčný symbol f platí:

$$f(\vec{x}) \simeq y \leftrightarrow f(\vec{x}) \triangleright \underline{y}.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Pomocou párových konštruktorov z rôznymi rozlišovacími položkami:

$$x_i = \langle 0, i \rangle \quad (\text{premenné})$$

$$0 = \langle 1, 0 \rangle \quad (\text{konštanta } 0)$$

$$D(t_1, t_2, t_3) = \langle 2, t_1, t_2, t_3 \rangle \quad (\text{podmienkový výraz})$$

$$\langle t, ts \rangle = \langle 3, t, ts \rangle \quad (\text{kontrakcia argumentov})$$

$$e(ts) = \langle 4, e, ts \rangle \quad (\text{aplikácia funkcie})$$

$$S = \langle 5, 0 \rangle \quad (\text{funkcia nasledovníka})$$

$$P = \langle 6, 0 \rangle \quad (\text{funkcia predchodcu})$$

$$f_n = \langle 7, n \rangle \quad (\text{funkčná premenná})$$

$$\lambda_n. t = \langle 8, n, t \rangle. \quad (\text{definovaná funkcia})$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Kontrakcia argumentov

- ▶ Notáčaná konvencia pre kontrakčnú funkciu:

$$\langle t_1, t_2, ts \rangle \equiv \langle t_1, \langle t_2, ts \rangle \rangle.$$

- ▶ Kontrakciou n -tice argumentov $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{N}^n$ rozumieme číslo

$$\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle \in \mathbb{N}.$$

- ▶ Projekčná funkcia $[ts]_i^n$ operuje na kontrakciach argumentov

$$[\langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle]_i^n = t_i \quad \text{pre } 1 \leq i \leq n.$$

Je to primitívne rekurzívna funkcia.

Aritmetizácia výpočtového modelu

Aritmetizácia rekurzívnych termov a funkčných symbolov

Číslo $\ulcorner \tau \urcorner$ resp. $\ulcorner f \urcorner$ je kódom termu τ resp. funkčného symbolu f :

$$\ulcorner x_i \urcorner = \mathbf{x}_i$$

$$\ulcorner 0 \urcorner = \mathbf{0}$$

$$\ulcorner D(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \urcorner = \mathbf{D}(\ulcorner \tau_1 \urcorner, \ulcorner \tau_2 \urcorner, \ulcorner \tau_3 \urcorner)$$

$$\ulcorner f(\tau_1, \dots, \tau_n) \urcorner = \ulcorner f \urcorner(\langle \ulcorner \tau_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \tau_n \urcorner \rangle)$$

$$\ulcorner S \urcorner = \mathbf{S}$$

$$\ulcorner P \urcorner = \mathbf{P}$$

$$\ulcorner f_n \urcorner = \mathbf{f}_n$$

$$\ulcorner \lambda_n \cdot \tau \urcorner = \mathbf{\lambda}_n \cdot \ulcorner \tau \urcorner.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Príklad

Regulárna rekurzívna definícia

$$x + y = \text{if } x \neq 0 \text{ then } S(P(x) + y) \text{ else } y.$$

Rekurzívna definícia so silnou rovnosťou

$$x_1 + x_2 \simeq D(x_1, S(P(x_1) + x_2), x_2).$$

Rekurzívny funkčný symbol

$$\lambda_2.D(x_1, S f_2(P(x_1), x_2), x_2)$$

a jeho aritmetizácia

$$\lambda_2.D\left(x_1, S\left(f_2(\langle P(x_1), x_2 \rangle)\right), x_2\right).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť prvá

Unárna operácia $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ vytvorí kód numerálu $\underline{x} \equiv \overbrace{S \dots S}(x\text{-krát})(0)$:

$$\ulcorner \underline{x} \urcorner = \ulcorner \overbrace{S \dots S}(x\text{-krát})(0) \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $\ulcorner \underline{x} \urcorner$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$\ulcorner \underline{0} \urcorner = \mathbf{0} \qquad \ulcorner \underline{x+1} \urcorner = \mathbf{S}(\ulcorner \underline{x} \urcorner).$$

Jej inverzia je funkcia $Dc(t)$, ktorá dekoduje kód numerálu:

$$Dc(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = x.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $Dc(t)$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$Dc(\mathbf{0}) = 0 \qquad Dc \mathbf{S}(t) = Dc(t) + 1.$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Monadické numerály, časť druhá

Predikát $Nm(t)$ platí, ak číslo t je kódom nejakého numerálu:

$$Nm(t) \leftrightarrow \exists x t = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Jej charakteristická funkcia $Nm_*(t)$ je primitívne rekurzívna:

$$Nm_*(0) = 1$$

$$Nm_* S(t) = 1 \leftarrow Nm(t) = 1$$

$$Nm_* S(t) = 0 \leftarrow Nm(t) \neq 1$$

$$Nm_*(t) = 0 \leftarrow \neg(t = 0 \vee \exists t_1 t = S(t_1)).$$

Predikátová forma uvedenej definície

$$Nm(0)$$

$$Nm S(t) \leftarrow Nm(t).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Substitúcia

Ternárna funkcia $t[e; rs]$ je aritmetizácia operácie substitúcie $\tau[\lambda_n.\sigma; \underline{x}]$ nad rekurzívnymi termami:

$$\ulcorner \tau \urcorner [\ulcorner \lambda_n.\sigma \urcorner; \langle \ulcorner \underline{x}_1 \urcorner, \dots, \ulcorner \underline{x}_n \urcorner \rangle] = \ulcorner \tau[\lambda_n.\sigma; \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n] \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie $t[e; rs]$ plynie z tohoto vyjadrenia

$$x_i[e; rs] = [rs]_i^{Ar(e)}$$

$$0[e; rs] = 0$$

$$D(t_1, t_2, t_3)[e; rs] = D(t_1[e; rs], t_2[e; rs], t_3[e; rs])$$

$$\langle t, ts \rangle[e; rs] = \langle t[e; rs], ts[e; rs] \rangle$$

$$f_n(ts)[e; rs] = e(ts[e; rs])$$

$$f(ts)[e; rs] = f(ts[e; rs]) \leftarrow \neg \exists n f = f_n.$$

Tu $Ar(e)$ je primitívne rekurzívna funkcia taká, že $Ar(\ulcorner f \urcorner) = n$ pre n -árny definovaný rekurzívny funkčný symbol f .

Aritmetizácia výpočtového modelu

Pomocné operácie

Špecifikácia:

$$Pn(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \dot{-} 1 \urcorner$$
$$Dn(\ulcorner \underline{x} \urcorner, t_2, t_3) = D(x, t_2, t_3).$$

Primitívna rekurzívnosť oboch funkcií plynie z tohoto vyjadrenia

$$Pn(0) = 0 \qquad Dn(0, t_2, t_3) = t_3$$
$$Pn S(t) = t \qquad Dn(S(t_1), t_2, t_3) = t_2.$$

Pomocný primitívny rekurzívny predikát

$$Nms(n, ts) \leftrightarrow \forall i (1 \leq i \leq n \rightarrow Nm([ts]_i^n)).$$

Aritmetizácia výpočtového modelu

Jeden krok výpočtu

Špecifikácia redukčnej funkcie $Rd(t)$:

$$\text{ak } \tau \triangleright_1 \rho, \text{ potom } Rd(\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \rho \urcorner \qquad Rd(\ulcorner \underline{x} \urcorner) = \ulcorner \underline{x} \urcorner.$$

Primitívna rekurzívnosť funkcie plynie z tohoto vyjadrenia

$$Rd(0) = 0$$

$$Rd D(t_1, t_2, t_3) = Dn(t_1, t_2, t_3) \leftarrow Nm(t_1)$$

$$Rd D(t_1, t_2, t_3) = D(Rd(t_1), t_2, t_3) \leftarrow \neg Nm(t_1)$$

$$Rd \langle t, ts \rangle = \langle t, Rd(ts) \rangle \leftarrow Nm(t)$$

$$Rd \langle t, ts \rangle = \langle Rd(t), ts \rangle \leftarrow \neg Nm(t)$$

$$Rd S(t) = S(Rd(t))$$

$$Rd P(t) = Pn(t) \leftarrow Nm(t)$$

$$Rd P(t) = P(Rd(t)) \leftarrow \neg Nm(t)$$

$$Rd (\lambda_n \cdot t)(ts) = t[\lambda_n \cdot t; ts] \leftarrow Nms(n, ts)$$

$$Rd (\lambda_n \cdot t)(ts) = (\lambda_n \cdot t)(Rd(ts)) \leftarrow \neg Nms(n, ts).$$