1-AIN-470 Špecifikácia a verifikácia programov

Letný semester 2016/17
9. prednáška

Ján Komara

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia triedy primitívne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):

$$\mathrm{I}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

  pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = h\big(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n)\big).$$

- Primitívna rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0, y_1, \ldots, y_n) &= g(y_1, \ldots, y_n) \\ f\big(\mathrm{S}(x), y_1, \ldots, y_n\big) &= h\big(x, f(x, y_1, \ldots, y_n), y_1, \ldots, y_n\big). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia triedy primitívne rekurzívnych funkcií

- Základné funkcie:
  - konštantná funkcia $\mathrm{Z}(x) = 0$,
  - funkcia nasledovníka $\mathrm{S}(x) = x + 1$,
  - identity (projekcie):

    $$\mathrm{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$$

    pre každé $1 \leq i \leq n$.
- Kompozícia (skladanie) funkcií:

  $$f(\vec{x}) = h\big(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})\big).$$

- Primitívna rekurzia:

  $$\begin{aligned} f(0, \vec{y}) &= g(\vec{y}) \\ f\big(\mathrm{S}(x), \vec{y}\big) &= h\big(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}\big). \end{aligned}$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia

- Základné funkcie: $\mathsf{Z}(x) = 0$, $\mathsf{S}(x) = x + 1$, $\mathsf{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$.
- Kompozícia funkcií: $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))$.
- Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(\mathsf{S}(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Sčítanie

$$h(x, z, y) = \mathsf{S}\,\mathsf{I}_2^3(x, z, y)$$

$$0 + y = y \qquad\qquad 0 + y = \mathsf{I}(y)$$

$$x + 1 + y = x + y + 1 \qquad\qquad \mathsf{S}(x) + y = h(x, x + y, y)$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia

- Základné funkcie: $\mathsf{Z}(x) = 0$, $\mathsf{S}(x) = x + 1$, $\mathsf{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$.
- Kompozícia funkcií: $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$.
- Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(\mathsf{S}(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Násobenie

$$h_2(x, z, y) = \mathsf{I}_2^3(x, z, y) + \mathsf{I}_3^3(x, z, y)$$

$$0 \cdot y = 0 \qquad\qquad 0 \cdot y = \mathsf{Z}(y)$$

$$(x + 1) \cdot y = x \cdot y + y \qquad\qquad \mathsf{S}(x) \cdot y = h_2(x, x \cdot y, y)$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Definícia

- Základné funkcie: $\mathrm{Z}(x) = 0$, $\mathrm{S}(x) = x + 1$, $\mathrm{I}_i^n(\vec{x}) = x_i$.
- Kompozícia funkcií: $f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$.
- Primitívna rekurzia:

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y}) \qquad f(\mathrm{S}(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y}).$$

Umocňovanie

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_1(x) &= \mathrm{S}\,\mathrm{Z}(x) \\ h_3(y, z, x) &= \mathrm{I}_3^3(y, z, x) \cdot \mathrm{I}_2^3(y, z, x) \\ f(0, x) &= \mathrm{C}_1(x) \end{aligned}$$

$$x^0 = 1 \qquad f(\mathrm{S}(y), x) = h_3(y, f(y, x), x)$$

$$x^{y+1} = x \cdot x^y \qquad x^y = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y))$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne odvodenia

$$
\begin{aligned}
& & h(x,z,y) &= \mathsf{S}\,\mathsf{I}^3_2(x,z,y) \\
0+y &= y & 0+y &= \mathsf{I}(y) \\
x+1+y &= x+y+1 & \mathsf{S}(x)+y &= h(x,x+y,y) \\
& & h_2(x,z,y) &= \mathsf{I}^3_2(x,z,y)+\mathsf{I}^3_3(x,z,y) \\
0\cdot y &= 0 & 0\cdot y &= \mathsf{Z}(y) \\
(x+1)\cdot y &= x\cdot y+y & \mathsf{S}(x)\cdot y &= h_2(x,x\cdot y,y) \\
& & \mathsf{C}_1(x) &= \mathsf{S}\,\mathsf{Z}(x) \\
& & h_3(y,z,x) &= \mathsf{I}^3_3(y,z,x)\cdot \mathsf{I}^3_2(y,z,x) \\
& & f(0,x) &= \mathsf{C}_1(x) \\
x^0 &= 1 & f\big(\mathsf{S}(y),x\big) &= h_3\big(y,f(y,x),x\big) \\
x^{y+1} &= x\cdot x^y & x^y &= f\big(\mathsf{I}^2_2(x,y),\mathsf{I}^2_1(x,y)\big)
\end{aligned}
$$

Primitívne rekurzívne funkcie

Primitívne rekurzívne funkcie a deklaratívne programovanie

- Základný vývoj primitívne rekurzívnych funkcií.
- Primitívne rekurzívne predikáty a ohraničená minimalizácia.
- Párovacia funkcia a aritmetizácia dátových štruktúr.
- Vnorená jednoduchá rekurzia:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= g(y) \\ f(x+1,y) &= h\Big(x, f\big(x, s_1(x,y)\big), f\big(x, s_2(x,y,f(x,s_1(x,y)))\big), y\Big). \end{aligned}$$

- Regulárne rekurzívne definície s mierou:

$$f(\vec{x}) = \tau[f;\vec{x}].$$

Podmienka regularity $\Gamma_{f(\vec{\rho})} \rightarrow \mu[\vec{\rho}] < \mu[\vec{x}]$ pre rekurzívne volanie $f(\vec{\rho})$ funkcie f v terme τ.