Cantorova párovacia funkcia

Celočíselná odmocnina. Zápis $\lfloor\sqrt{x}\rfloor$ označuje celočíselnú odmocninu prirodzeného čísla x. Je to funkcia na $\mathbb{N}$ definovaná predpisom:

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = y \leftrightarrow y^2 \leq x < (y+1)^2. \tag{1}$$

Podmienka jednoznačnosti pre (1)

$$y_1^2 \leq x < (y_1+1)^2 \land y_2^2 \leq x < (y_2+1)^2 \rightarrow y_1 = y_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti perfektných štvorcov

$$y_1 < y_2 \rightarrow y_1^2 < (y_1+1)^2 \leq y_2^2 < (y_2+1)^2.$$

Existenčná podmienka pre (1)

$$\forall x \exists y\, y^2 \leq x < (y+1)^2$$

plynie z faktu, že funkcia $\lambda x.x^2$ na $\mathbb{N}$ má neohraničený obor hodnôt obsahujúci číslo 0.

Trojuholníkové čísla. Zápis T_n označuje funkciu na $\mathbb{N}$ ktorej hodnoty sú trojuholníkové čísla:

$$\mathrm{T}_n = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=0}^{n} i. \tag{2}$$

Nasledujúca vlastnosť trojuholníkových čísel sa dokáže matematickou indukciou

$$8\mathrm{T}_n + 1 = (2n+1)^2. \tag{3}$$

Pravá inverzná funkcia. Zápis T_n^{-1} označuje pravú inverznú funkciu k T_n:

$$\mathrm{T}_n^{-1} = m \leftrightarrow \mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1}. \tag{4}$$

Podmienka jednoznačnosti pre (4)

$$\mathrm{T}_{m_1} \leq n < \mathrm{T}_{m_1+1} \land \mathrm{T}_{m_2} \leq n < \mathrm{T}_{m_2+1} \rightarrow m_1 = m_2$$

je dôsledok tejto monotónnej vlastnosti trojuholníkových čísel

$$m_1 < m_2 \rightarrow \mathrm{T}_{m_1} < \mathrm{T}_{m_1+1} \leq \mathrm{T}_{m_2} < \mathrm{T}_{m_2+1}.$$

Existenčná podmienka pre (4)

$$\forall n \exists m \, \mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1}$$

plynie z faktu, že obor funkcie T_m je neohraničený obsahujúci číslo 0.

Teraz vyjadrime pravú inverznú funkciu k T_n s pomocou celočíselnej odmocniny. Postupnými úpravami dostávame

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}_m \leq n < \mathrm{T}_{m+1} \Rightarrow 8\mathrm{T}_m + 1 \leq 8n + 1 < 8\mathrm{T}_{m+1} + 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \\
&(2m+1)^2 \leq 8n + 1 < (2(m+1)+1)^2 = (2m+3)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \\
&2m + 1 \leq \left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor \leq 2m + 2 \Rightarrow 2m \leq \left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1 \leq 2m + 1 \Rightarrow \\
&m \leq \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2m+1}{2} \right\rfloor = m.
\end{aligned}$$

Platí preto

$$\mathrm{T}_n^{-1} = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1}{2} \right\rfloor = \left(\left\lfloor \sqrt{8n+1} \right\rfloor - 1 \right) \div 2.$$

Cantorova párovacia funkcia. Jednou z najjednoduchších nesurjektívnych párovacích funkcií je táto modifikácia Cantorovej párovacej funkcie

$$\langle x, y \rangle = \left| \left\{ (a, b) \;\middle|\; a + b < x + y \vee a + b = x + y \wedge a \leq x \right\} \right|, \tag{5}$$

ktorá je zobrazená na obrázku:

$\langle x, y \rangle$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1	2	4	7	11	16	22	$\cdots$
1	3	5	8	12	17	23	30	$\cdots$
2	6	9	13	18	24	31	39	$\cdots$
3	10	14	19	25	32	40	49	$\cdots$
4	15	20	26	33	41	50	60	$\cdots$
5	21	27	34	42	51	61	72	$\cdots$
6	28	35	43	52	62	73	85	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Aby sme našli jej numerické vyjadrenie, využijeme nasledujúce identity, ktoré plynú priamo z definície (5):

$$\langle x, y \rangle = \langle 0, x + y \rangle + x \tag{6}$$

$$\langle 0, x + y \rangle = \left| \left\{ (a, b) \;\middle|\; a + b < x + y \right\} \right| + 1. \tag{7}$$

Postupnými úpravami teraz dostaneme:

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &\overset{(6)}{=} \langle 0,x+y\rangle + x \overset{(7)}{=} \big|\{\,(a,b) \mid a+b<x+y\,\}\big| + 1 + x = \\ &= \sum_{d<x+y} \big|\{\,(a,b) \mid a+b=d\,\}\big| + 1 + x = \sum_{d<x+y} (d+1) + 1 + x = \\ &= \sum_{d\le x+y} d + 1 + x \overset{(2)}{=} \mathrm{T}_{x+y} + 1 + x.\end{aligned}$$

Preto

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=0}^{x+y} i + 1 + x = \mathrm{T}_{x+y} + 1 + x. \tag{8}$$

Diagonálna funkcia. Unárna funkcia $d(x)$ je taká, že platí

$$d\langle x,y\rangle = x+y. \tag{9}$$

Diagonálnu funkciu definujeme explicitne vzťahom

$$d(x) = \mathrm{T}^{-1}_{x\dot{-}1}. \tag{10}$$

Dôkaz. Všimnime si najprv, že z nasledujúcich úprav

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{x+y}+1 = \mathrm{T}_{0+x+y}+1+0 &\overset{(8)}{=} \langle 0,x+y\rangle \overset{(6)}{\le} \langle x,y\rangle \overset{(5)}{<} \langle 0,x+y+1\rangle \overset{(8)}{=} \\ &= \mathrm{T}_{0+x+y+1}+1+0 = \mathrm{T}_{x+y+1}+1\end{aligned}$$

plynie táto nerovnosť

$$\mathrm{T}_{x+y} \le \langle x,y\rangle \dot{-} 1 < \mathrm{T}_{x+y+1}.$$

Odtiaľ dostaneme

$$x+y \overset{(4)}{=} \mathrm{T}^{-1}_{\langle x,y\rangle \dot{-} 1} \overset{(10)}{=} d\langle x,y\rangle. \qquad \square$$

Projekcie. Prvá a druhá projekcia modifikovanej Cantorovej párovacej funkcie sú unárne funkcie $\boldsymbol{\pi}_1$ a $\boldsymbol{\pi}_2$ také, že

$$\boldsymbol{\pi}_1(0) = 0 \tag{11}$$
$$\boldsymbol{\pi}_1\langle x,y\rangle = x \tag{12}$$
$$\boldsymbol{\pi}_2(0) = 0 \tag{13}$$
$$\boldsymbol{\pi}_2\langle x,y\rangle = y. \tag{14}$$

Funkcie definujeme explicitne vzťahom

$$\boldsymbol{\pi}_1(x) = x \dot{-} \big\langle 0, d(x) \big\rangle$$
$$\boldsymbol{\pi}_2(x) = d(x) \dot{-} \boldsymbol{\pi}_1(x).$$

Dôkaz. Postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_1 \langle x, y\rangle &= \langle x, y\rangle \dot{-} \big\langle 0, d\langle x, y\rangle \big\rangle \overset{(9)}{=} \langle x, y\rangle \dot{-} \langle 0, x+y\rangle \overset{(6)}{=} \\
&= \langle 0, x+y\rangle + x \dot{-} \langle 0, x+y\rangle = x \\
\boldsymbol{\pi}_2\langle x, y\rangle &= d\langle x, y\rangle \dot{-} \boldsymbol{\pi}_1 \langle x, y\rangle \overset{(9),(12)}{=} x + y \dot{-} x = y.
\end{aligned}$$

Dôkaz zvyšných vlastností prenechávame čitateľovi. $\square$